



**HAL**  
open science

# Identification de lois de comportement enrichies pour les géomatériaux en présence d'une localisation de la déformation

Khadijatou El Moustapha

► **To cite this version:**

Khadijatou El Moustapha. Identification de lois de comportement enrichies pour les géomatériaux en présence d'une localisation de la déformation. Géotechnique. Université de Grenoble, 2014. Français. NNT: . tel-02074620

**HAL Id: tel-02074620**

**<https://hal.univ-grenoble-alpes.fr/tel-02074620v1>**

Submitted on 20 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité: **Ingénierie-Matériaux, Mécanique, Environnement, Énergétique, Procédés, Production**

Arrêté ministériel: 7 août 2006

Présentée par

**Khadijatou EL MOUSTAPHA**

Thèse dirigée par **Pierre BÉSUELLE** et  
codirigée par **Yannick SIEFFERT** et **René CHAMBON**

préparée au sein du **Laboratoire Sols, Solides, Structures et Risques**  
dans l'**École Doctorale IMEP2**

## **Identification d'une loi de comportement enrichie pour les géomatériaux en présence d'une localisation de la déformation**

Soutenance de thèse prévue publiquement le **23.04.2014**,  
devant le jury composé de:

**Monsieur Claudio TAMAGNINI**

Professeur, Università degli studi di Perugia, Rapporteur

**Monsieur Frédéric COLLIN**

Chercheur Qualifié FNRS, Université de Liège, Rapporteur

**Monsieur Gioacchino (Cino) VIGGIANI**

Professeur, Université Joseph Fourier, Président

**Monsieur Panagiotis KOTRONIS**

Professeur, École Centrale de Nantes, Examineur

**Monsieur Pierre BÉSUELLE**

Chargé de Recherche, CNRS, Directeur de thèse

**Monsieur Yannick SIEFFERT**

MCF, Université Joseph Fourier, Encadrant

**Monsieur, René, CHAMBON**

Professeur, Université Joseph Fourier, Encadrant



---

## Remerciements

Ayant oubliée de remercier ma famille le jour de la soutenance, je souhaite débiter cette page traditionnelle de remerciements par remercier ma famille.

Je remercie mes frères et soeurs, qui m'ont toujours encouragé, ils ont toujours été présents pour moi et m'ont toujours soutenus. Je remercie mes parents, tout particulièrement, ma mère, qui malgré la distance a su me donner les bons conseils quand j'en ai eu besoin.

Je remercie mon mari, il a su être patient durant toute la thèse et n'a pas hésité à m'aider à chaque fois que j'en eu besoin, merci du fond du coeur. Je dédie cette thèse à ma famille et mon mari.

J'ai eu la chance d'avoir eu comme directeur de thèse Pierre Bésuelle, qui a suivis mes travaux de thèse de très près. Je le remercie pour sa gentillesse, sa disponibilité et la confiance qu'il m'a accordée tout au long de ces 3 années de thèse. Il a su m'accompagner dans les moments cruciaux comme à la rédaction du manuscrit.

Je remercie mes deux encadrants René Chambon et Yannick Sieffert. Cette thèse n'aurait sans doute pas vue le jour sans les précieux conseils et les diverses explications de René Chambon.

Je remercie également les membres du jury qui ont accepté de lire et de commenter cette thèse : Claudio Tamagnini, Frédéric Collin, Gioacchino (Cino) Viggiani et Panagiotis Kotronis.

Je souhaite ici exprimer le plaisir que j'ai eu d'avoir effectué ma thèse au sein du laboratoire 3SR. Plusieurs personnes en sont pour quelques chose. Ferdiando Marinelli et Matias Silva avec qui j'ai partagé d'agréables moments et avec qui j'ai lié une profonde amitié, Edward, Hana, Kien, Bram, Patrizia, Albert, Ghonwa, Zainab, etc. Merci à tous.

Je tiens aussi à remercier les différents professeurs avec qui j'ai travaillé de près ou de loin au laboratoire, Cino Viggiani, qui m'a initié au monde de la recherche, Denis Caillerie et Jacques Desrues pour leurs diverses explications, Simon Salager pour ses encouragements.

La liste des personnes citées ci-dessus ici n'est bien sûr pas exhaustive, je remercie donc tout ceux qui ont contribué à leur manière à la réussite de cette thèse.

لكم خالص  
الشكر  
والتقدير

---

## Résumé

Modéliser la localisation de la déformation dans les géomatériaux de manière objective nécessite l'utilisation de méthodes capables de régulariser le problème aux limites en introduisant une longueur caractéristique. Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons choisi d'utiliser les milieux à microstructures de types second gradient. Une question, se pose alors quant à l'identification des paramètres constitutifs qui interviennent dans la formulation de ces milieux. L'objectif de cette thèse est de mettre en place une méthode d'identification d'une loi de comportement enrichie de type second gradient.

Une partie de l'identification a été réalisée à partir d'essais homogènes, cependant l'identification complète nécessite de considérer des modes de déformation à forts gradients, comme cela est le cas en présence d'une localisation de la déformation. La procédure d'identification développée s'appuie sur des résultats expérimentaux d'essais mécaniques sur le grès de Vosges conduits à deux confinements différents (20 et 30 MPa), pour lesquels le mode de déformation des échantillons a été caractérisé à l'aide de mesures de champs cinématiques (corrélation d'image), y compris en régime localisé. Un certain nombre d'observables ont été extraits de ces essais, qui ont servi à établir la comparaison entre calculs numériques et observations expérimentales.

Une étude de sensibilité exhaustive a été menée pour établir une matrice de sensibilité utile par la suite pour l'optimisation des observables. Afin de calculer cette matrice, deux études de sensibilité sont effectuées. Ces études consistent à évaluer l'influence de la variation de chaque paramètre constitutif sur les données sélectionnées. La première étude de sensibilité porte sur la partie homogène des essais, elle permet l'optimisation d'un certain nombre de paramètres qui jouent un rôle uniquement dans cette partie. La deuxième étude concerne le régime de déformation localisé. Celle-ci permet le calcul de la matrice de sensibilité. Grâce à cette matrice, nous avons réalisé une optimisation des observables. Ainsi, chaque observable pourra être optimisé indépendamment des autres. A l'issue de cette optimisation un jeu de paramètre est proposé. Il permet de reproduire de manière fiable, les essais expérimentaux.

### Mots-clés

Second gradient, Localisation de la déformation, Identification, Matrice de sensibilité, Optimisation.

---

## Abstract

The strain localisation modelling of geomaterials requires the use of enhanced models, able to regularise the boundary value problem, by introducing a characteristic length. In this research work, we have chosen to use second gradient models. A question then arises, concerning the identification of second gradient constitutive parameters. This PhD research work aimed to develop an identification method to obtain these parameters.

The study proposed here covers a parametric identification of a constitutive law written in the local second gradient formalism. A part of this identification may be performed through homogenous tests, however the complete identification requires the consideration of high gradient deformation modes, as it is the case where localized deformation is observed. The identification procedure developed uses experimental results from mechanical tests on Vosges sandstone, for which the deformation mode was characterised by kinematic field measurement, including the localized regime. A certain number of observable data can be extracted from these tests, they are then used for the comparison between experimental and numerical data.

It is necessary to compute the sensitivity matrix in order to optimise the observable data. In this sense, two sensitivity studies have been carried out, allowing the evaluation of the influence of each constitutive parameter on the selected data. This first analyse concern the homogenous part of the tests. Constitutive parameters involved in this part can be then optimized. The second analyse concerns the localized regime and the sensitivity matrix computation. Once this is achieved, the optimization of the observable data can be conducted. Each observable data can be optimised independently. A set of constitutive parameters is proposed. It allows a good matching between experimental and numerical results at two confining pressures ; 20 and 30 MPa.

## Keywords

Second gradient, Strain localisation, Identification, Sensitivity matrix, Optimisation

---

## Table des matières

---

<b>Table des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xx</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Étude bibliographique</b>	<b>6</b>
2.1 Modèles enrichis . . . . .	7
2.1.1 Les modèles non locaux . . . . .	7
2.1.2 Les modèles non locaux de second gradient dans le cadre de l'élasto-plasticité . . . . .	9
2.1.3 Milieux à microstructures . . . . .	10
2.1.3.1 Milieu de Cosserat . . . . .	10
2.1.3.2 Les modèles locaux du second gradient . . . . .	12
2.2 Analyse inverse . . . . .	16

2.2.1	Principe de résolution . . . . .	17
2.2.2	Technique de minimisation . . . . .	18
2.2.2.1	Les méthodes stochastiques . . . . .	19
2.2.2.2	Les méthodes énumératives . . . . .	20
2.2.2.3	Les méthodes déterministes . . . . .	20
2.3	Loi constitutive macroscopique . . . . .	22
2.4	Loi constitutive second gradient . . . . .	25
2.5	Résultats expérimentaux . . . . .	28
2.5.1	Description de la cellule de l'appareil triaxial vrai . . . . .	29
2.5.1.1	Résultats . . . . .	31
2.6	Conclusion . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Essais homogènes</b>	<b>39</b>
3.1	Essais triaxiaux . . . . .	40
3.1.1	Modélisation et résultats de l'essai triaxial . . . . .	42
3.2	Essais biaxiaux . . . . .	43
3.2.1	Données expérimentales . . . . .	44
3.2.2	Calculs numériques . . . . .	45
3.2.2.1	Étude de sensibilité du modèle . . . . .	46
3.3	Étude de bifurcation . . . . .	55
3.3.1	Critère de bifurcation de Rice . . . . .	56
3.3.1.1	Cas général . . . . .	57
3.3.1.2	Critère de bifurcation appliqué à la loi Plasol . . . . .	60
3.4	Conclusions . . . . .	63

<b>4</b>	<b>Choix des paramètres numériques</b>	<b>65</b>
4.1	Outils d'exploitation des données numériques . . . . .	66
4.1.1	Calcul de la largeur et de l'orientation de la bande . . . . .	66
4.1.2	Méthode de calcul de la déformation volumique . . . . .	70
4.1.3	Caractérisation de la nature de la bande . . . . .	71
4.1.4	Profil de déplacement dans la bande . . . . .	74
4.2	Choix du maillage et du paramètre second gradient $D$ . . . . .	76
4.2.1	Calculs avec un maillage de 200 et 1800 éléments . . . . .	77
4.2.2	Calcul avec un maillage de 7200 éléments et des maillages non structurés . . . . .	81
4.2.3	Maillage de 16200 éléments . . . . .	88
4.3	Choix des conditions aux limites . . . . .	92
4.3.1	Utilisation d'une zone affaiblie . . . . .	92
4.3.2	Utilisation du frétage . . . . .	96
4.3.3	Utilisation de tirages aléatoires . . . . .	98
4.4	Convergence du calcul . . . . .	101
4.4.1	Technique d'intégration par sous pas . . . . .	101
4.4.2	Problèmes de convergence liés au snapback . . . . .	103
4.5	Conclusions . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Étude de sensibilité sur le calcul hétérogène</b>	<b>108</b>
5.1	Calcul de référence . . . . .	109
5.2	Étude de sensibilité sur la cohésion finale et le paramètre $\beta_c$ . . . . .	111
5.2.1	Étude de sensibilité sur la cohésion . . . . .	112



5.2.2	Étude de sensibilité sur le paramètre $\beta_c$ . . . . .	114
5.3	Étude de sensibilité sur le frottement final et le paramètre $\beta_\varphi$ . . . . .	117
5.3.1	Étude de sensibilité sur le frottement final . . . . .	118
5.3.2	Étude de sensibilité sur le paramètre $\beta_\varphi$ . . . . .	120
5.4	Étude de sensibilité sur l'angle de dilatance et le paramètre second gradient $D$ . . . . .	123
5.4.1	Étude de sensibilité sur l'angle de dilatance . . . . .	124
5.4.2	Étude de sensibilité sur le paramètre second gradient $D$ . . . . .	126
5.5	Matrice de sensibilité . . . . .	129
5.6	Introduction du frottement apparent et de la cohésion apparente dans la matrice de sensibilité . . . . .	131
5.6.1	Complément de l'étude de sensibilité . . . . .	132
5.7	Conclusions . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Optimisation des observables</b>	<b>137</b>
6.1	Méthodologie . . . . .	138
6.2	Optimisation du pic de contrainte . . . . .	138
6.3	Optimisation de la déformation axiale au pic . . . . .	142
6.4	Optimisation du palier de contrainte . . . . .	147
6.5	Optimisation de la largeur de bande . . . . .	150
6.6	Optimisation de la déformation volumique . . . . .	155
6.7	Problématique liée à un angle de dilatance constant . . . . .	159
6.8	Solution proposée pour l'angle de dilatance . . . . .	161
6.9	Jeu de paramètres final . . . . .	168
6.10	Conclusion . . . . .	178

7 Conclusions et perspectives	180
A Profil de déplacement	184
B Modifications dans le code de calcul Lagamine	187

---

## Table des figures

---

1.1	Localisation de la déformation, dans un échantillon de grès soumis à un essai biaxial a), observé dans un massif rocheux près de la ville d'Orange en France b) . . . . .	1
2.1	Contrainte et couple de contrainte dans un milieu de Cosserat . . . . .	11
2.2	Représentation d'un problème directe . . . . .	16
2.3	Représentation d'un problème inverse . . . . .	16
2.4	Exemple de fonction d'erreur . . . . .	19
2.5	Critère de Drucker-Prager dans l'espace des contraintes principales . . . . .	22
2.6	Exemple de la variation de la cohésion et du frottement en fonction de la déformation plastique équivalente . . . . .	24
2.7	Les variables nodales utilisées dans l'élément fini second gradient . . . . .	27
2.8	Enveloppe des pics de contraintes du grès de Vosges . . . . .	28
2.9	Schéma de principe l'appareil triaxial vrai du laboratoire 3SR . . . . .	29

2.10	Évolution de la contrainte axiale en fonction du raccourcissement axial normalisé. Nous retrouvons à gauche la courbe globale et à droite un zoom autour du pic de contrainte. Les numéros correspondent aux prises de photos. Les oscillations sur la courbe de droite proviennent d'une imperfection de la régulation du piston axial dû au générateur de pression (paramètre de réactivité) . . . . .	30
2.11	Courbes de chargement de trois essais biaxiaux réalisés avec un confinement de 20 MPa sur un grès de Vosges . . . . .	31
2.12	Courbes de chargement de trois essais biaxiaux réalisés avec un confinement de 30 MPa sur un grès de Vosges . . . . .	32
2.13	pics de contraintes dans le diagramme I1-I2 . . . . .	32
2.14	Courbes de déformation volumique pour trois essais biaxiaux réalisés avec un confinement de 20 MPa . . . . .	33
2.15	Courbes de déformation volumique pour trois essais biaxiaux réalisés avec un confinement de 30 MPa . . . . .	33
2.16	Second invariant de la déformation pour un essai biaxial avec un confinement de 20 MPa . . . . .	34
2.17	Chemin de contraintes pour un essai biaxial avec un confinement de 30 MPa . . . . .	34
2.18	Bandes de cisaillement pour l'essai 4 avec un confinement de 30 MPa .	36
2.19	Bandes de cisaillement pour l'essai 6 avec un confinement de 20 MPa .	37
3.1	Réponse mécanique globale du grès des Vosges en compression axisymétrique pour plusieurs confinements (20, 30 et 40 MPa) . . . . .	41
3.2	Conditions aux limites pour l'essai triaxial axisymétrique . . . . .	42
3.3	Comparaison des résultats expérimentaux et des résultats donnés par le modèle pour le jeu de paramètres du tableau 3.1. Courbe de contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé . . . . .	43
3.4	Courbes de chargement pour deux essais biaxiaux avec un confinement de 20 et 30 MPa, respectivement . . . . .	44
3.5	Déformation volumique pour deux essais biaxiaux avec un confinement de 20 et 30 MPa, respectivement . . . . .	45

3.6	Conditions aux limites de l'essai biaxial avec une pression de confinement $p$ et un déplacement $u_2$ imposé en tête de l'échantillon . . . . .	45
3.7	Étude de sensibilité sur le paramètre $\beta_c$ . . . . .	47
3.8	Étude de sensibilité sur le paramètre $\beta_\varphi$ pour un confinement de 20 MPa	48
3.9	Étude de sensibilité sur le paramètre $c_f$ , pour un confinement de 20 MPa	49
3.10	Pour ces 5 calculs, $\varphi_f$ est le seul paramètre qui a été modifié . . . . .	50
3.11	Étude de sensibilité sur l'angle de dilatance $\Psi$ , pour un confinement de 30 MPa . . . . .	51
3.12	Étude de sensibilité avec un confinement de 30MPa sur les paramètres $\beta_c$ et $c_f$ . . . . .	52
3.13	Étude de sensibilité avec un confinement de 30MPa sur les paramètres $\beta_\varphi$ et $\varphi_f$ . . . . .	53
3.14	Étude de l'influence du paramètre $\varphi_f$ sur le pic de contrainte aux confinements de 20 et 30 MPa, dans le plan $I_\sigma - II_{\hat{\sigma}}$ . . . . .	54
3.15	Étude sensibilité du paramètre $\Psi$ , pour un confinement de 30 MPa . . .	55
3.16	Exemple de bifurcation en mécanique . . . . .	56
3.17	Bande de localisation plane et le vecteur normal unitaire $n$ . . . . .	57
3.18	Déterminant du tenseur acoustique en fonction de l'angle $\theta$ pour 3 niveaux de raccourcissement . . . . .	62
3.19	Analyse du critère de Rice appliqué au modèle Plasol pour le jeu de référence à 20 MPa de confinement (tableau 3.2. A gauche le point indique le seuil où le critère commence à être satisfait, à droite, éventail des orientations de bande pour lesquelles le critère est satisfait . . . . .	63
4.1	Localisation de la déformation pour un essai biaxial . . . . .	66
4.2	Zone de la bande où la largeur et l'orientation seront calculées . . . . .	67
4.3	Méthode de calcul de la largeur de bande . . . . .	68
4.4	Les trois droites de régression qui permettent de calculer la largeur de la bande . . . . .	69

4.5	Différence entre une bande bien définie (à droite) et une bande mal définie (à gauche) . . . . .	70
4.6	Évolution de la déformation volumique globale en fonction du raccourcissement axial normalisé . . . . .	71
4.7	Représentation du repère locale de la bande et le repère principal . . . . .	72
4.8	Définition du repère local de la bande, les points en rouge sont les points de Gauss en décharge élastique, en bleu sont les points de Gauss en charge plastique . . . . .	72
4.9	Évolution de l'incrément de la composante tangentielle normalisé par l'incrément de raccourcissement axial en fonction du raccourcissement, pour le vecteur $V$ interne à la bande . . . . .	73
4.10	Évolution de l'incrément de la composante normale normalisé par l'incrément de raccourcissement en fonction du raccourcissement, pour le vecteur $V$ interne à la bande . . . . .	73
4.11	Nœuds pour lesquels le profil de déplacement est calculé . . . . .	74
4.12	Le profil de déplacement est obtenu pour un alignement vertical de nœuds	75
4.13	Variation du déplacement relatif des nœuds en fonction de leur position (distance par rapport à l'axe $(oy)$ du repère local de la bande) au premier pas de la plasticité (régime de déformation homogène) . . . . .	75
4.14	Profil de déplacement incrémental des nœuds en fonction de leur position (distance par rapport à l'axe $(oy)$ du repère local de la bande) pour un pas où le calcul a localisé . . . . .	76
4.15	Évolution de la contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé pour un calcul homogène et un calcul avec localisation (maillage de 200 éléments) . . . . .	78
4.16	Évolution de la contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé. La contrainte est calculée en divisant la réaction par la section actualisée d'une part puis en la divisant par la section initiale d'autre part. . . . .	78
4.17	La bande de localisation au dernier pas de calcul. Le raccourcissement est de 0.02. Les points rouges sont les points de Gauss en charge plastique	79

4.18	A gauche une bande de localisation correspondant à un niveau de raccourcissement de 0.609 et un calcul effectué avec 1800 éléments. A droite la bande de localisation minimale obtenue pour le calcul effectué avec 200 éléments . . . . .	80
4.19	Deux maillages non structurés de 3568 et 2820 éléments et un maillage structuré de 7200 éléments . . . . .	81
4.20	Courbes de chargement et bandes de localisation pour 3 calculs effectués avec les trois maillages $D=2$ N. Pour chaque calcul, nous montrons la bande à un moment où sa largeur est la plus petite . . . . .	83
4.21	Courbes de chargement et bandes de localisation pour 3 calculs effectués avec les trois maillages et $D=4$ N. Pour chaque calcul, nous montrons la bande à un moment où sa largeur est la plus petite . . . . .	84
4.22	Courbes de chargement et bandes de localisation pour 3 calculs effectués avec les trois maillages $D=8$ N. Pour chaque calcul, nous montrons la bande à un moment où sa largeur est la plus petite . . . . .	85
4.23	Courbes de chargement et bandes de localisation pour 3 calculs effectués avec les trois maillages $D=16$ N. Pour les calculs avec les maillage de 7200 et 2820 éléments, nous montrons la bande qui correspond au minimum de la largeur. En ce qui concerne le calcul avec 3568 éléments nous montrons la bande au dernier pas de temps . . . . .	87
4.24	Largeurs de bande en fonction de $\sqrt{D}$ pour les trois maillages utilisés . . . . .	88
4.25	Calcul avec un maillage de 16200 éléments et plusieurs valeurs du paramètre second gradient $D$ . . . . .	89
4.26	Comparaison des largeurs de bandes pour les maillages à 7200 et 16200 éléments . . . . .	90
4.27	Évolution de la largeur de la bande et de l'orientation pour un calcul avec 16200 éléments et $D = 1N$ . . . . .	91
4.28	Évolution de la contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé pour différentes valeurs de $D$ . Comparaison entre les calculs avec 4 et 81 éléments affaiblis . . . . .	93
4.29	Structures des bandes de localisation de la déformation correspondant aux calculs avec 4 éléments affaiblis et différentes valeurs de $D$ . . . . .	94

4.30	Comparaison entre les largeurs de la bande, pour les calculs avec 4 et 81 éléments affaiblis, pour différentes valeurs de $D$ . . . . .	95
4.31	Évolution de la largeur de la bande pour les calculs avec 4 éléments affaiblis et plusieurs valeurs de $D$ . . . . .	95
4.32	Comparaison entre les courbes de contraintes des calculs avec et sans frétagé. Pour chaque calcul, nous montrons la structure de localisation qui correspond au minimum de la largeur . . . . .	97
4.33	Comparaison entre les structures de localisation pour deux calculs effectués avec et sans zone affaiblie. Nous imposons un frétagé pour les deux calculs. Pour chaque calcul, nous montrons la structure de localisation qui correspond au minimum de la largeur . . . . .	98
4.34	Les différentes structures de bandes obtenus par le tirage aléatoire . . . . .	99
4.35	Comparaison de la réponse mécanique pour les calculs sans éléments affaiblis avec tirage aléatoire . . . . .	100
4.36	Comparaison de la réponse mécanique et des largeurs de bande (nous prenons le minimum de la largeur) pour les calculs sans élément affaibli avec des tirages aléatoires effectués à différents niveaux de raccourcissement . . . . .	100
4.37	Localisation de la déformation dans une barre 1D . . . . .	103
4.38	Schéma d'évolution du paramètre $D$ expliquant la définition des reprises tôt et tard . . . . .	104
4.39	Évolution de la contrainte déviatorique pour les calculs avec reprise de calculs afin de tester la méthode de résolution du snapback . . . . .	105
4.40	Évolution de la déformation volumique globale (partie plastique) pour les calculs avec reprise afin de tester la méthode de résolution du snapback	105
4.41	Évolution de la largeur et de l'orientation de la bande pour les calculs avec reprise de calculs afin de tester la méthode de résolution du snapback	106
5.1	Résultats du calcul effectué avec les paramètres de référence et un confinement de 20 MPa . . . . .	110
5.2	Résultats du calcul effectué avec les paramètres de référence et un confinement de 30 MPa . . . . .	111



---

5.3	Étude de sensibilité sur le paramètre $c_f$ pour un confinement de 20 MPa	112
5.4	Étude de sensibilité sur le paramètre $c_f$ pour un confinement de 30 MPa	113
5.5	Influence de la variation du paramètre $c_f$ sur les observables pour les confinements de 20 et 30 MPa . . . . .	114
5.6	Étude de sensibilité sur le paramètre $\beta_c$ pour un confinement de 20 MPa	115
5.7	Étude de sensibilité sur le paramètre $\beta_c$ pour un confinement de 30 MPa	116
5.8	Influence de la variation du paramètre $\beta_c$ sur les observables pour les confinements à 20 et 30 MPa . . . . .	117
5.9	Étude de sensibilité sur le paramètre $\varphi_f$ pour un confinement de 20 MPa	118
5.10	Étude de sensibilité sur le paramètre $\varphi_f$ pour un confinement de 30 MPa	119
5.11	Influence de la variation du paramètre $\varphi_f$ sur les observables pour les confinements à 20 et 30 MPa . . . . .	120
5.12	Étude de sensibilité sur le paramètre $\beta_\varphi$ pour un confinement de 20 MPa	121
5.13	Étude de sensibilité sur le paramètre $\beta_\varphi$ pour un confinement de 30 MPa	122
5.14	Influence de la variation du paramètre $\beta_\varphi$ sur les observables pour les confinements à 20 et 30 MPa . . . . .	123
5.15	Étude de sensibilité sur le paramètre $\Psi$ pour un confinement de 20 MPa	124
5.16	Étude de sensibilité sur le paramètre $\Psi$ pour un confinement de 30 MPa	125
5.17	Influence de la variation du paramètre $\Psi$ sur les observables pour les confinements à 20 et 30 MPa . . . . .	126
5.18	Étude de sensibilité sur le paramètre $D$ pour un confinement de 20 MPa	127
5.19	Étude de sensibilité sur le paramètre $D$ pour un confinement de 30 MPa	128
5.20	Influence de la variation du paramètre $D$ sur les observables pour les confinements à 20 et 30 MPa . . . . .	129
5.21	Pics de contraintes dans le plan $I_\sigma - II_{\hat{\sigma}}$ pour les calculs effectués avec les paramètres de référence et les deux confinements de 20 et 30 MPa .	131

5.22	Sensibilité de $c_a$ et $\varphi_a$ à la cohésion finale . . . . .	132
5.23	Sensibilité de $c_a$ et $\varphi_a$ au paramètre $\beta_c$ . . . . .	133
5.24	Sensibilité de $c_a$ et $\varphi_a$ au frottement final . . . . .	133
5.25	Sensibilité de $c_a$ et $\varphi_a$ au paramètre $\beta_\varphi$ . . . . .	134
5.26	Sensibilité de $c_a$ et $\varphi_a$ à l'angle de dilatance . . . . .	134
5.27	Sensibilité de $c_a$ et $\varphi_a$ au paramètre second gradient $D$ . . . . .	135
6.1	Réponse mécanique des calculs qui visent à optimiser le pic. Le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	140
6.2	Courbes de variation de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement des calculs qui visent à optimiser le pic. Le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	141
6.3	Zoom sur la courbe de contrainte et de la déformation volumique (régime post-pic) des calculs qui visent à optimiser le pic de contrainte. Les bandes de localisation (représentées à droite) correspondent au moment où la largeur de la bande est à son minimum. . . . .	142
6.4	Réponse mécanique des calculs qui visent à optimiser la déformation axiale. Le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	144
6.5	Courbes de variation de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement pour les calculs qui visent à optimiser la déformation axiale. Le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	145
6.6	Zoom sur la courbe de contrainte et de la déformation volumique (régime post-pic) des calculs qui visent à optimiser la déformation axiale au pic. Les bandes de localisation (représentées à droite) correspondent au moment où la largeur de la bande est à son minimum. . . . .	146
6.7	Réponse mécanique des calculs qui visent à optimiser le palier de contrainte. Le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	148
6.8	Courbes de variation de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement pour les calculs qui visent à optimiser le palier de contrainte. Le confinement imposé est de 20 MPa . . . . .	149

---

6.9	Zoom sur la courbe de contrainte et de déformation volumique (régime post-pic) des calculs qui visent à optimiser le palier de contrainte. Les bandes de localisation (représentées à droite) correspondent au moment où la largeur de la bande est à son minimum. . . . .	150
6.10	Réponse mécanique des calculs qui visent à optimiser la largeur de bande. Le confinement imposé est de 20 MPa . . . . .	152
6.11	Courbes de variation de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement pour les calculs qui visent à optimiser la largeur de bande. Le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	153
6.12	Zoom sur la courbe de contrainte et de déformation volumique (régime post-pic) des calculs qui visent à optimiser la largeur de bande. Les bandes de localisation correspondent au moment où la largeur de la bande est à son minimum . . . . .	154
6.13	Réponse mécanique des calculs qui visent à optimiser la déformation volumique. Le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	156
6.14	Courbes de variation de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement pour les calculs qui visent à optimiser la déformation volumique. Le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	157
6.15	Zoom sur la courbe de contrainte et de déformation volumique (régime post-pic) des calculs qui visent à optimiser la déformation volumique. Les bandes de localisation correspondent au moment où la largeur de la bande est à son minimum . . . . .	158
6.16	Comparaison entre la déformation volumique de l'essai numérique et celle de l'essai expérimental pour un confinement de 20 MPa . . . . .	160
6.17	Courbes de chargement pour les calculs effectués avec un angle de dilatance constant et un angle de dilatance variable pour un confinement de 20 MPa. . . . .	162
6.18	Courbes de déformation volumique pour les calculs effectués avec un angle de dilatance constant et un angle de dilatance variable . . . . .	162
6.19	Courbes de variation de $\Psi$ pour les calculs effectués avec un angle de dilatance constant et un angle de dilatance variable, pour un confinement de 20 MPa. . . . .	163

6.20	Comparaison de l'éventail des orientations de bande donné par le critère de bifurcation pour un calcul avec un angle de dilatance constant et un calcul avec un angle de dilatance variable. Les carrés sur les courbes de chargement représentent le moment où le critère de bifurcation est satisfait	164
6.21	Étude de sensibilité sur $\beta_{\Psi}$ , le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	165
6.22	Étude de sensibilité sur $DEC_{\Psi}$ , le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	166
6.23	Étude de sensibilité sur $\Psi_i$ , le confinement imposé est de 20 MPa. . . . .	167
6.24	Étude de sensibilité sur $\Psi_f$ . . . . .	168
6.25	Résultats du calcul homogène effectué avec le jeu de paramètres tableau 6.9 et un confinement de 20 MPa . . . . .	170
6.26	Résultats du calcul effectué avec un maillage de 16200 éléments et un confinement de 20 MPa. Le jeu de paramètres utilisé est présenté tableau 6.9 . . . . .	172
6.27	Bande de localisation (points en charge plastique) qui correspond au raccourcissement où la bande est à son minimum . . . . .	173
6.28	Valeur de l'angle de dilatance dans l'échantillon numérique au début de la reprise avec $D = 10N$ (image de gauche) et à la fin du calcul (image de droite) . . . . .	174
6.29	Évolution de l'angle de dilatance en fonction de la déformation plastique équivalente pour l'élément 1 et l'élément 28 . . . . .	174
6.30	Positions des éléments 16 et 28 dans le maillage à 16200 éléments . . . . .	175
6.31	Bandes de localisation pour le calcul effectué avec un confinement de 20 MPa. L'image de gauche correspond au dernier pas de calcul avec $D = 40N$ . L'image de droite correspond au premier pas la reprise avec $D = 20N$ . . . . .	176
6.32	Bandes de localisation pour le calcul effectué avec un confinement de 30 MPa. L'image de gauche correspond au dernier pas de calcul avec $D = 40N$ . L'image de droite correspond au premier pas de la reprise avec $D = 20N$ . . . . .	176
6.33	Résultats du calcul effectué avec un maillage de 16200 éléments et un confinement de 30 MPa. Le jeu de paramètres utilisé est présenté au tableau 6.9 . . . . .	177

6.34	Chemin de contrainte dans le plan déviatorique pour les essais numériques et expérimentaux . . . . .	178
A.1	Profil de déplacement pour le pas 8 . . . . .	185
A.2	Profil de déplacement pour le pas 13 . . . . .	185
A.3	Profil de déplacement pour le pas 16 . . . . .	186
A.4	Profil de déplacement pour le pas 20 . . . . .	186

---

## Liste des tableaux

---

3.1	Paramètres utilisés pour le modèle triaxial axisymétrique . . . . .	42
3.2	Paramètres de référence de l'étude de sensibilité représentés par la en courbe bleu sur les figures . . . . .	46
4.1	Paramètres du modèle pour le calcul avec un maillage de 200 éléments .	77
4.2	Paramètres du modèle pour le calcul avec un maillage de 7200 éléments et les maillages non structurés . . . . .	82
4.3	Paramètres du modèle pour le calcul avec 16200 éléments et du frétage	96
4.4	Paramètres du modèle pour le calcul avec 16200 éléments et un tirage aléatoire . . . . .	99
4.5	Durée des calculs pour un maillage de 7200 éléments et différentes valeurs de $\alpha_N$ . . . . .	102
5.1	Paramètres utilisés pour le calcul de référence . . . . .	109
5.2	Résumé des résultats de l'étude de sensibilité, les symboles utilisés dans le tableau désignent : * * * forte influence, * * moyenne influence, * faible influence et o influence négligeable . . . . .	136

---

6.1	Modifications à apporter à $\beta_c$ et $\beta_\varphi$ afin d'augmenter le pic de 2.5 MPa	138
6.2	Modifications à apporter à $\beta_c$ et $\beta_\varphi$ afin d'augmenter la déformation axiale au pic de 0.04% . . . . .	143
6.3	Modifications à apporter à $\beta_c$ , $\beta_\varphi$ et $c_f$ afin d'augmenter le palier de contrainte de 3 MPa. . . . .	147
6.4	Modifications à apporter à $\beta_c$ , $\beta_\varphi$ , $c_f$ et $D$ afin d'augmenter la largeur de la bande de 0.5 mm. . . . .	151
6.5	Modifications à apporter à $\beta_c$ , $\beta_\varphi$ , $c_f$ et $D$ afin d'augmenter la largeur de la bande de 1.5 mm. . . . .	151
6.6	Modifications à apporter à $\beta_c$ , $\beta_\varphi$ et $\Psi$ afin d'optimiser la déformation volumique . . . . .	155
6.7	Paramètres utilisés pour le calcul effectué avec un angle de dilatance constant . . . . .	161
6.8	Paramètres utilisés pour le calcul effectué avec un angle de dilatance variable. . . . .	161
6.9	Paramètres constitutifs choisis pour mieux approcher les données expérimentales . . . . .	169

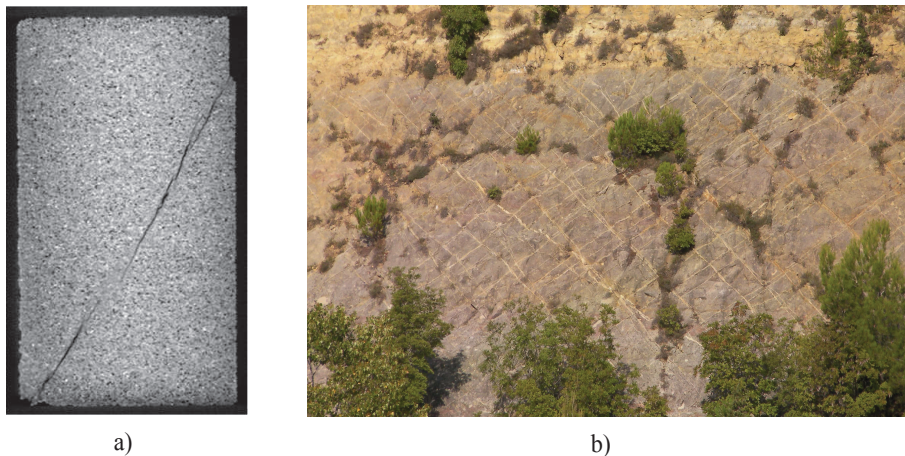
# CHAPITRE 1

---

## Introduction

---

La localisation et les phénomènes d'instabilités qui y sont liés jouent un rôle crucial dans le comportement à la rupture des sols et des roches. Les mécanismes physiques responsables de la localisation sont variés et les zones de localisation peuvent apparaître dans une large gamme de matériaux de microstructures différentes et sous diverses sollicitations (figure 1.1).



**FIGURE 1.1** – Localisation de la déformation, dans un échantillon de grès soumis à un essai biaxial a), observé dans un massif rocheux près de la ville d'Orange en France b)



Une modélisation correcte de la localisation de la déformation constitue un enjeu majeur dans plusieurs domaines d'application, parmi lesquels nous pouvons citer : stabilité des parois de trou de forages, stabilité des parois de tunnels, stockage de déchets radioactifs en profondeur ainsi que le stockage de CO<sub>2</sub> dans les roches profondes

La localisation de la déformation est observée à la fois in situ et à l'échelle du laboratoire. Les observations sur le terrain montre qu'elle peut se présenter sous la forme de figures géologiques : les plissements, les failles, bandes de cisaillement (figure 1.1, image b)), etc. Mais aussi sous la forme de plan de glissement dans un cadre plus géotechniques.

A l'échelle du laboratoire, des essais élémentaires sont réalisés afin d'établir les relations constitutives du matériau étudié. Ces essais, pourtant voulus les plus homogènes possibles, présentent quasi systématiquement à partir d'un certain chargement la localisation de la déformation (figure 1.1, image a)), sous la forme de ce qu'on peut appeler des plans de rupture [34] qui traversent l'échantillon suivant une certaine inclinaison. Dans ces conditions, il est difficile pour un expérimentateur d'interpréter les résultats de l'essai puisque l'échantillon devient lui-même une structure. De ce fait, plusieurs tentatives ont été menées afin d'éliminer les causes de cette localisation, en améliorant les conditions d'essais, par exemple en éliminant certaines causes de perturbation de l'essai, telles que le frottement dû au frottement du matériau sur les têtes pour un essai triaxial exisymétrique. Ceci a effectivement permis d'atténuer les hétérogénéités et d'avoir un champ de déformation plus homogène au début du chargement, sans pour autant empêcher l'apparition de la localisation de la déformation, à partir de niveaux de chargement plus importants.

Étant donné l'importance du phénomène, l'analyse de la localisation est devenue un domaine de recherche très intensif et très actif depuis une trentaine d'années, au niveau tant théorique, qu'expérimental et numérique [34].

D'un point de vue théorique, la localisation de la déformation peut être considérée comme un problème de bifurcation, c'est-à-dire la transition d'un chemin fondamental de comportement vers une chemin alternatif. Les bases théoriques nécessaires à l'analyse de la bifurcation par localisation de la déformation ont été posées par Hadamard [46], Hill [49] et Mandel [64]. Puis Rice [84] a développé une approche où le mode de bifurcation en bandes de cisaillement est spécifié. Les premiers résultats disponibles concernaient les métaux, Asaro [3], Christoffersen et Hutchinson [28] etc. De nombreux chercheurs se sont intéressés par la suite à l'étude de la localisation de la déformation dans les géomateriaux, Hill et Hutchinson [50], Vardoulakis et al. [99], Desrues [34], etc.

Sur le plan expérimental, il existe plusieurs techniques de détection de la localisation. Les techniques mises en œuvre à cet effet dépendent du caractère ductile ou fragile du matériau utilisé. On peut regrouper les techniques utilisées actuellement pour la mesure du champs de déformation en trois grandes familles.

- Les émissions acoustiques sont de plus en plus utilisées, elles sont basées sur la détection des signaux provenant des ondes élastiques transitoires émises lors de la libération brutale de l'énergie dans un matériau lors d'une sollicitation mécanique. Les ondes sont détectées par des capteurs piézoélectriques posés à la surface de l'objet et qui sont par la suite convertis en signaux électriques. La position des événements acoustiques (relocalisation) peut être effectuée si l'on dispose de nombreux capteurs en comparant les temps d'arrivée des signaux par capteurs [97].
- La tomographie à rayons X est une méthode non-destructive qui permet de visualiser la structure interne d'un échantillon opaque en trois dimensions. Ces images 3D sont obtenues par l'analyse d'une multitude de radiographies prises avec des incidences différentes. Elle permettent de visualiser un champ d'atténuation. Cette technique permet de localiser très finement les hétérogénéités, singularités, vides ou inclusions présents dans le matériau [36].
- La corrélation d'images numériques (DIC) est une méthode de métrologie optique basée sur la comparaison d'images numériques. Ces techniques se sont généralisées depuis une quinzaine d'année et sont connues pour être des outils puissants et flexibles pour la mesure de la déformation. Cette technique est facile à mettre en œuvre, puisqu'elle ne nécessite qu'un appareil photo pour une analyse 2D, ou bien deux appareils pour une analyse 3D de surface. La corrélation 3D en volume est accessible via des images obtenues en tomographie (par exemple à rayons x).

D'un point de vue numérique, les articles de Needleman [75] et de Needleman et Tvergaard [76] semblent être les premières publications orientées vers la modélisation par la méthode des éléments finis de la localisation de la déformation en bandes de cisaillement. Les premiers résultats obtenus montraient la dépendance des solutions par rapport au maillage. En effet, les lois de comportement classiques ne permettent pas de restaurer l'objectivité des calculs. Il en résulte que la modification des procédures numériques classiques pour améliorer la modélisation de ce genre de problème devient indispensable. Plusieurs techniques ont été proposées en ce sens, Belytschko et al. [11], Leroy et Ortiz [61], Chambon [22], Pijaudier [81], etc.

Dans les travaux de la présente thèse, nous utiliserons le formalisme de milieu à microstructure dit de second gradient local [[23];[43]]. Ce formalisme permet de restaurer l'objectivité des calculs vis-à-vis du maillage en introduisant une longueur caractéristique venant contrôler la largeur de bande de localisation. Une nouvelle problématique se pose alors quant à la manière d'identifier les paramètres constitutifs des lois écrites dans ce formalisme, l'identification ne peut se faire de manière identique aux lois de milieux classiques pour deux raisons majeures.

La première, il est d'usage de calibrer les modèles classiques à partir d'essais élémentaires au sens où la déformation reste la plus homogène possible. Cependant, puisque la déformation atteinte dans les bandes est généralement très importante, il est important

d'évaluer la loi de comportement à des niveaux de déformation élevés. Ces niveaux de déformation ne peuvent être atteints en régime de déformation homogène, comme en témoigne les études expérimentales utilisant les mesures de champ [17].

Deuxièmement, certains paramètres de modèles enrichis ne jouent un rôle qu'en présence d'hétérogénéité de déformation, ce qui exclut encore de se restreindre à une identification à partir d'essais élémentaires. Par ailleurs, des essais qui seraient volontairement hétérogènes, par un contrôle adéquat des conditions limites, ne suffisent pas à générer des gradients de déformation suffisamment importants pour mobiliser suffisamment les paramètres en question, du moins tant que la localisation n'apparaît pas. À partir de ce constat, il convient d'adopter une stratégie plus élaborée, en ne s'interdisant plus d'exploiter des essais de laboratoire à partir du moment où apparaît la localisation, pour peu que ces essais permettent une description fine du champ de déformation. Les méthodes de mesure de champ, qui deviennent de plus en plus standards, offrent la possibilité d'extraire un certain nombre d'observables des essais quant à l'organisation spatiale et temporelle des bandes de localisation (largeur de bandes, nombre de bandes actives ou désactives, etc...). C'est cette démarche que nous avons poursuivie dans ce travail de thèse.

Ce mémoire de thèse est composé de 5 chapitres. Le chapitre 1 présente une bibliographie succincte sur les milieux enrichis, avec un focus sur les milieux de type second gradient utilisé dans le cadre de cette thèse. Nous présenterons aussi la loi de comportement que nous utilisons, quelques notions sur les méthodes d'analyse inverse puis nous terminerons par présenter certains résultats des essais expérimentaux menés sur le grès à l'aide de l'appareil triaxial vrai du laboratoire 3SR.

Le chapitre 2 est consacré aux résultats des calculs homogènes. Nous retrouverons dans ce chapitre également l'étude de bifurcation basée sur le critère de Rice [84] appliquée au modèle utilisé et qui permet notamment de déduire les angles d'orientation de bandes possibles en cas de localisation.

Dans le chapitre 3, nous exposons les choix numériques que nous avons dû faire pour les calculs hétérogènes. Dans ce contexte nous aborderons la méthode suivie pour le choix de la discrétisation spatiale. Seront présentés également dans le chapitre les outils numériques développés pour le traitement des résultats de calcul afin d'en extraire un certain nombre d'observables.

Afin de procéder à l'identification, nous avons réalisé une étude de sensibilité qui sera utilisée pour l'optimisation. L'étude de sensibilité en régime de déformation localisée a permis de calculer une matrice de sensibilité, elle est l'une des contributions originales de ce travail. Les résultats de cette étude ainsi que la méthodologie suivie pour le calcul de la matrice sont exposés au chapitre 4.

Au chapitre 5, l'optimisation des observables qui ont été retenus pour comparer ex-

périence et calculs, est exposée. De plus, nous présenterons les développements liés à l'introduction d'un angle de dilatance variable dans la loi de comportement. Puis, nous montrerons les calculs numériques qui ont permis de reproduire les résultats expérimentaux de manière satisfaisante.

La notation utilisée dans ce document est la suivante; les vecteurs ou tenseurs sont exprimés par leur noms suivi d'indices écrits en minuscules. La convention de sommation d'Einstein est appliquée pour les indices à répétition. Tout autre indice utilisé sera précisé dans le corps du texte.

## CHAPITRE 2

---

### Étude bibliographique

---

Étudier la localisation de la déformation dans les milieux continus classiques à l'aide de la théorie de la bifurcation, permet d'aborder la question comme un problème de perte d'unicité et d'indiquer le niveau de sollicitation satisfaisant les conditions d'apparition de bandes de localisation, ainsi que les orientations possibles de ces bandes. Cependant ces milieux ne permettent pas d'avoir des indications propres sur l'évolution des bandes dans le régime post-localisé, et en particulier de restaurer l'objectivité des calculs vis-à-vis du maillage. Il est donc nécessaire d'utiliser d'autres méthodes pour régulariser le problème et obtenir une solution du problème aux limites qui ne dépend pas du maillage. Les méthodes de traitement de la post-localisation sont variées et peuvent être classées en deux approches. Les approches continues d'une part comprenant les modèles du second gradient, les modèles non locaux, les milieux de Cosserat, et d'autre part les approches de type discontinu.

Nous avons choisis d'utiliser dans le cadre de cette thèse les modèles de second gradient locaux. L'étude bibliographique que nous proposons ici, a pour objectif de présenter cette méthode de régularisation. Celle-ci a été développée il y a une quinzaine d'années au laboratoire 3SR et permet d'obtenir des solutions objectives vis-à-vis du maillage. L'identification des paramètres qui découle de cette méthode de régularisation est nécessaire afin d'obtenir des résultats qui permettent de reproduire au mieux les données expérimentales. C'est dans ce cadre que nous introduisons dans la deuxième partie de ce chapitre les méthodes d'analyse inverse qui permettent d'identifier les paramètres d'une loi constitutive lorsque la détermination de ces paramètres n'est pas possible

par les méthodes classiques. Les méthodes d'analyse inverse n'ont pas été abordées stricto sensu dans le cadre de cette thèse, pour des raisons que nous expliquerons dans ce qui suivra. Nous avons effectué une étude de sensibilité suivie d'une optimisation des paramètres de la loi constitutive en s'appuyant sur les méthodes de différences finies.

## 2.1 Modèles enrichis

Les analyses régulières en mécanique du solide sont en générale menées dans le contexte de la mécanique des milieux continus, dans lesquels une continuité du champs de déplacements est postulée. Cependant la considération de l'hétérogénéité du champ de déplacement est essentielle dans beaucoup de problèmes en ingénierie. Dans le cas des approches continues, le solide entier est vu à partir de la mécanique des milieux continus, ainsi la notion de déformation est définie non seulement dans la partie continue du corps mais aussi dans les zones hétérogènes, que celles-ci correspondent à des bandes de localisation ou bien des fissures. Il est possible de ce fait d'utiliser des équations constitutives standards reliant la contrainte à la déformation partout dans le solide. Nous présentons dans cette section les méthodes de régularisation dans le cadre des approches continues uniquement, nous aborderons les modèles à microstructures, les modèles non locaux, puis nous donnerons un aperçu des modèles viscoplastiques. Le lecteur intéressé par les méthodes de régularisation par des approches discontinues, pourra consulter les travaux de Johnson et Scott [55], Oliver et al. [78], Chambon et Crochepeyre [24], Jirásek [53, 54], et autres.

### 2.1.1 Les modèles non locaux

D'après de nombreux auteurs, Bažant et al. [6], Bažant et Belytschko [5], Pijaudier-Cabot et Bažant [81], Belytschko et al. [10], Pastor et al. [80], la mécanique des milieux continus classique ne permet pas de bien rendre compte du comportement radoucissant pour lequel les problèmes numériques sont les plus cruciaux. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus classique, les grandeurs physiques du problème sont définies localement en un point (contraintes, déformations, et variables internes). Si on considère que l'adoucissement est une conséquence macroscopique de l'existence d'hétérogénéités (vides, micro-fissures), il peut donc avoir lieu en un point matériel. L'hypothèse dans la théorie non locale est la suivante : les grandeurs physiques qui rendent compte de l'état du solide en un point ne dépendent pas uniquement du point mais aussi de son voisinage immédiat. La valeur de ces grandeurs en ce point doit donc être une moyenne sur un voisinage de ce point. A titre d'exemple un modèle non local peut être obtenu en considérant le paramètre d'écrouissage comme non local. Dans le cas de la plasticité standard à écrouissage isotrope, la surface d'écoulement  $f$  dépend

de la contrainte  $\sigma$  et d'une variable interne  $\gamma^p$  telle que :

$$\gamma^p = \int \dot{\gamma}^p dt \quad (2.1)$$

Où  $\dot{\gamma}^p$  est un invariant du tenseur de déformation plastique  $\varepsilon^p$  :

$$\dot{\gamma}^p = \sqrt{\frac{2}{3}(\dot{\varepsilon}^p)^T \dot{\varepsilon}^p} \quad (2.2)$$

Une moyenne sur  $\dot{\gamma}^p$  est proposée par Bažant et Lin [7] telle que :

$$\bar{\dot{\gamma}}^p = \frac{1}{V_r(x)} \int_v g(s) \dot{\gamma}^p(x+s) dV \quad (2.3)$$

$V_r(x) = \int_v g(s-x) dV$  correspond au volume voisin autour du point matériel de coordonnée  $x$  (sous forme d'une sphère centrée au point de coordonnées  $x$ ).  $s$  représente la distance entre le point matériel de coordonnées  $x$  et le point où le calcul de moyenne est effectué.  $g$  est une fonction de pondération qui est prise en général comme la fonction d'erreur de Gauss définie par :

$$g(s) = e^{-\frac{|s|^2}{2l^2}} \quad (2.4)$$

où  $l$  est l'échelle de longueur interne du milieu continu non local. On introduit ainsi un paramètre de longueur interne qui est directement en rapport avec la largeur de la zone localisée.

La théorie non locale a pu aussi être utilisée en combinaison avec des modèles d'endommagement pour traiter des problèmes de localisation des déformations, par Pijaudier-Cabot et Bažant [81], Bažant et Pijaudier-Cabot [8] et Pijaudier-Cabot et Benallal [82]. Afin de ne pas rajouter une complexité à l'implémentation de ce type de modèles dans les codes aux éléments finis, les contraintes ainsi que les déformations sont dans la plus part des cas définies comme des variables locales, et seule la variable d'endommagement est définie comme une variable non locale. Ceci permet d'éviter de modifier les équations d'équilibre du problème aux limites et d'utiliser des éléments standards de continuité  $C^0$  dans la discrétisation éléments finis des problèmes aux limites. Classiquement pour les modèles d'endommagement isotropes, l'opérateur non local est appliqué sur la déformation équivalente. D'autres choix sont possibles en appliquant par exemple l'opérateur non local sur l'endommagement. Cependant, Jirásek [52] montre que certains choix de variables entraînent des phénomènes de "verrouillage" avec une contrainte résiduelle non nulle à des niveaux élevés de déformations.

Il est possible d'appliquer la théorie non locale à l'élasto-plasticité. Cependant il est important de souligner que dans la théorie de l'élasto-plasticité, la relation constitutive trouvée par les milieux non locaux découle d'une équation différentielle au lieu d'une équation algébrique. Cette équation est difficile à résoudre et son implémentation n'est pas pratique, (de Borst et al. [33]). De plus, si le domaine moyen s'étend à l'extérieur du solide considéré, un autre problème apparaît qui est celui des conditions aux limites additionnelles.

## 2.1.2 Les modèles non locaux de second gradient dans le cadre de l'élasto-plasticité

Les modèles non locaux de types second gradient ne sont pas écrits dans un cadre général et dépendent directement de la loi de comportement utilisée (plasticité, endommagement, ...). Nous restons ici dans le cadre général de l'élasto-plasticité, le terme second gradient est alors introduit à travers la dérivée seconde de la déformation plastique ou dans la règle d'écoulement, il est aussi possible qu'il soit introduit dans la condition de consistance. Ces modèles sont appelés non locaux puisque dans ces modèles l'équation constitutive qui est écrite sous forme incrémentale devient une équation aux dérivées partielles. Mühlhaus et Aifantis [69] ainsi que de Borst et Mühlhaus [32] ont montré qu'en utilisant un développement limité, ces modèles peuvent être considérés comme une approximation des modèles non locaux.

Nous présentons dans ce qui suit deux types de modèle non locaux du second gradient, le premier intègre le second gradient de la déformation plastique dans la surface d'écoulement, le deuxième quant à lui comporte un terme de second gradient dans la règle d'écoulement.

Dans le premier cas Mühlhaus et Aifantis [69] ou Sluys [91] introduisent le Laplacien de la déformation plastique équivalente  $k$  dans la surface de plasticité.

$$f(\sigma, k, \nabla^2 k) = 0 \quad (2.5)$$

Après quelques développements, nous remarquons que l'introduction du Laplacien dans la surface de charge, conduit à une écriture de la condition de consistance sous forme d'une équation différentielle sur le multiplicateur plastique. Il devient donc impossible d'obtenir l'expression de ce multiplicateur de façon explicite d'où la difficulté de son implémentation dans un code d'éléments finis.

Le deuxième type de modèle est celui de Vardoulakis et Aifantis [98] ou Zervos et al. [103], dans lequel le second gradient de la déformation plastique est introduit dans la règle d'écoulement ainsi que dans la surface de charge. La longueur interne est ainsi introduite de manière implicite. L'incrément de contrainte est défini en fonction de l'incrément de déformation élastique de la manière suivante :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e (\dot{\epsilon}_{kl} - l_e^2 \nabla^2 \dot{\epsilon}_{kl}^e) \quad (2.6)$$

Dans l'équation ci-dessus  $C_{ijkl}^e$  représente le tenseur élastique et  $l_e$  est un paramètre matériel de la dimension d'une longueur.

Une longueur interne est aussi introduite dans la surface d'écoulement comme suit :

$$f(\mu_{ij}, \Psi) = 0 \quad (2.7)$$



$\mu$  ci-dessus est un terme de contrainte réduite qui est fonction d'un paramètre qui a la dimension d'une longueur. Quand les déformations sont homogènes, les termes second gradient sont nuls pour les deux modèles, néanmoins en régime de post-localisation les déformations deviennent fortement hétérogènes et le second gradient joue dans ce cas un rôle primordial.

Il est possible à partir des modèles non locaux second gradient d'introduire des longueurs internes qui viennent régulariser le problème aux conditions aux limites et d'obtenir des solutions objectives vis-à-vis du maillage. La particularité de ces modèles est qu'ils sont liés à la loi de comportement utilisée, puisqu'ils ne sont pas formulés à partir d'une théorie générale. Ils n'existent pas de manière indépendante de la loi de comportement qui les fonde, contrairement aux modèles second gradient locaux qui seront présentés par la suite. De plus il est difficile de résoudre les équations qui découlent de l'utilisation de ces modèles.

### 2.1.3 Milieux à microstructures

Afin d'introduire les milieux à microstructures nous utilisons la définition donnée par Aifantis en 1978 [1] : un milieu continu à microstructure est vu comme un milieu continu classique, qui en plus, peut échanger masse, moment, énergie et entropie avec l'extérieur. La prise en compte de la microstructure dans la réponse macroscopique du matériau remonte aux travaux de Mindlin en 1968 [73], puis un peu plus tard des travaux de Aifantis en 1978 [1]. En 1984, Aifantis [2] a modélisé l'évolution de la microstructure et ses effets sur la réponse macroscopique des matériaux. On fait l'hypothèse qui permettra de distinguer les états "normaux" c'est-à-dire ceux qui sont liés à la structure macroscopique, et les états "excités" qui sont quant à eux liés à la structure microscopique. Il est possible de décrire les deux états par les équations d'équilibre habituelles du milieu continu modifié afin de prendre en compte leur interaction mécanique (échange de moments et de masses)

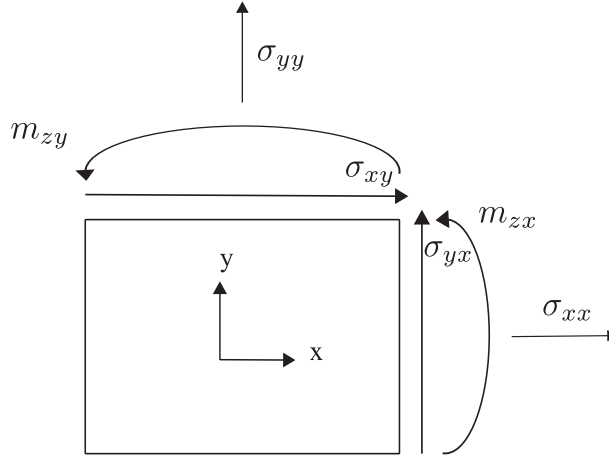
Le champ de second ordre, qui est rajouté à la description cinématique du milieu continu enrichi, représente la déformation et la rotation des grains. Dans la définition générale des milieux à microstructure, on ne fait aucune hypothèse sur ce champ.

#### 2.1.3.1 Milieu de Cosserat

En 1909, la théorie des milieux continus a été développée par Cosserat et Cosserat [29]. Elle a été par la suite appliquée par Mindlin [[71], [72]]. Cette théorie a été plus tard développée et utilisée par plusieurs auteurs dans le cadre de l'élasto-plasticité, citons

pour exemple Mühlhaus et Vardoulakis [70], Mühlhaus [[67], [68]], Vardoulakis et Sulem [100], Sulem et Vardoulakis [92], etc.

Il est supposé dans la théorie de Cosserat que la macrostructure est divisée en micro-éléments avec une échelle finie de longueur. Afin d'empêcher le milieu continu d'avoir une dépendance vis-à-vis du maillage, la dimension des micro-éléments est finie ce qui implique l'inclusion d'une longueur interne.



**FIGURE 2.1** – Contrainte et couple de contrainte dans un milieu de Cosserat

L'introduction des quantités cinématiques et statiques additionnelles telles que les couples de contraintes  $m_{zx}$  et  $m_{zy}$  (figure 2.1), et de ce qu'on peut appeler des micro-courbures  $k_{zx} = \frac{\partial w_z}{\partial x}$  et  $k_{zy} = \frac{\partial w_z}{\partial y}$  pour un milieu bidimensionnel, permet la régularisation.  $w_z$  est la micro-rotation autour de l'axe  $z$ , il apparaît dans la théorie de Cosserat comme une troisième quantité cinématique indépendante, qui vient s'ajouter aux deux composantes du champ de déplacement  $u_x$  et  $u_y$ .

Le vecteur de déplacement pour un milieu Cosserat peut donc s'écrire :

$$\mathbf{u} = [ u_x \quad u_y \quad w_z ]^T \quad (2.8)$$

Les vecteurs de déformation et de contrainte sont définis par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yx} \quad k_{xz}l \quad k_{yz}l ]^T \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yx} \quad m_{xz}/l \quad m_{yz}/l ]^T \quad (2.10)$$

Dans les équations (2.9) et (2.10) l'échelle de longueur  $l$  a été introduite afin d'avoir la même dimension pour toutes les composantes de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Comme dans un milieu classique les déformations normales sont définies par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.11)$$

et

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.12)$$

Les déformations de cisaillement sont définies de manière différente :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - w_z \quad (2.13)$$

et

$$\varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} - w_z \quad (2.14)$$

Notons qu'à la différence des modèles non locaux où l'enrichissement est introduit uniquement dans le régime inélastique, dans les milieux de Cosserat une échelle de longueur  $l$  est déjà introduite dans le régime élastique, et ce grâce au fait que les composantes cinématiques et statiques sont reliées par un module de flexion et que le rapport de ce module de flexion et du module d'Young a la dimension d'une longueur.

De Borst [31] a pu montré à travers un essai biaxial l'efficacité de l'utilisation des milieux Cosserat, dans le cadre de l'élastoplasticité. Il a considéré une surface de charge de type Drücker-Prager, en utilisant des paramètres adéquats et en introduisant une imperfection dans un élément du maillage, il est arrivé à déclencher la localisation des déformations. Mühlhaus et Vardoulakis [70] ont été les premiers à montrer que l'approche de Cosserat permet d'introduire une longueur interne et régularisait la solution du problème aux limites après l'apparition de la localisation. D'un point de vue numérique cette approche a plusieurs avantages puisqu'elle permet d'avoir une matrice de rigidité symétrique dans le cas où la relation incrémentale entre la contrainte et la déformation est symétrique. Ceci n'est pas le cas pour les modèles non locaux ou les modèles du second gradient.

Il est important de noter que le milieu de Cosserat est plus adapté aux milieux granulaires qu'aux milieux cohésifs. En effet ce milieu ne constitue une méthode de régularisation efficace que dans le cas où les rotations des grains sont les plus dominantes dans la déformation inélastique, dans le cas de la rupture en mode II par exemple. En modélisant un essai biaxial, Sluys [91] a montré que la solution obtenue avec le milieu Cosserat semble indépendante du maillage, néanmoins cette solution semble dépendante des lignes de maillage, puisqu'en utilisant un maillage avec des inclinaisons de lignes différentes, il obtenait des résultats tout à fait différents au niveau des largeurs de bandes. Ce problème semble provenir du fait que l'essai biaxial ne présente pas que de la localisation en mode II mais aussi montre de la localisation en mode I.

### 2.1.3.2 Les modèles locaux du second gradient

L'émergence de la théorie du second gradient remonte aux travaux de Mindlin et Eshel en 1968 [73] dans le cadre de l'élasticité linéaire. Dans ces travaux, ils introduisent une

dépendance du potentiel de la densité d'énergie à la déformation ainsi qu'au gradient de déformation. Ils ont de ce fait proposé trois formes pour l'écriture de cette théorie. Puis ils ont comparé ces trois formes et ont déduit une relation entre les contraintes et les conditions aux limites pour ces trois formes.

Plus tard en 1973, Germain [43] ((2.18) et (2.19)) a étudié cette théorie et a donné une formulation cohérente des milieux du second gradient, il a repris les trois formes déjà présentées dans les travaux de Mindlin et Eshel [73] mais est ensuite parti d'une formulation plus générale sans passer par la densité d'énergie de l'élasticité linéaire. Ceci en utilisant la méthode des puissances virtuelles, il aboutit donc à une interprétation différente et plus large. Nous utiliserons  $\star$  pour les quantités virtuelles.

- $u_i^\star$  représente le déplacement virtuel au niveau macroscopique
- $F_{ij}^\star$  est le gradient du déplacement virtuel au niveau macroscopique :

$$F_{ij}^\star = \frac{\partial u_i^\star}{\partial x_j} \quad (2.15)$$

- $\varepsilon_{ij}^\star$  est la déformation virtuelle au niveau macroscopique :

$$\varepsilon_{ij}^\star = \frac{1}{2}(F_{ij}^\star + F_{ji}^\star) \quad (2.16)$$

- $v_{ij}^\star$  est le gradient du déplacement virtuel au niveau microscopique
- $h_{ijk}^\star$  est le second gradient du déplacement au niveau microscopique

$$h_{ijk}^\star = \frac{\partial v_{ij}^\star}{\partial x_k} \quad (2.17)$$

La composante des travaux virtuels extérieurs s'écrit de la manière suivante :

$$W^{\star e} = \int_{\Omega} G_i u_i^\star dv + \int_{\partial\Omega} (t_i u_i^\star + T_{ij} v_{ij}^\star) ds \quad (2.18)$$

La composantes des travaux virtuels intérieurs s'écrit de la manière suivante :

$$W^{\star i} = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\star + \tau_{ij} (v_{ij}^\star - F_{ij}^\star) + \Sigma_{ijk} h_{ijk}^\star) dv \quad (2.19)$$

$\sigma_{ij}$  est le champ de contraintes macroscopiques. On désigne par  $\Sigma_{ijk}$  et  $G_i$  respectivement les doubles contraintes et les forces volumiques.  $t_i$  représente les forces classiques de surface et le terme additionnel  $T_{ij}$  les doubles forces.

Chambon et al. [23] ont constitué une formulation générale de la théorie du second gradient local dans le cadre des petites déformations, toutes les configurations d'équilibre sont supposées donc infiniment proches. Ces développements ont été appliqués sur un cas unidimensionnel pour un comportement élasto-plastique.

Dans la théorie du second gradient on fait l'hypothèse que les champs de déformation macroscopiques  $F_{ij}$  et microscopiques  $v_{ij}$  sont identiques. A l'équilibre nous pouvons écrire :

$$\int_{\Omega} \left( \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + \Sigma_{ijk} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_k} \right) d\Omega = \int_{\Omega} G_i u_i^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( t_i u_i^* + T_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) ds \quad (2.20)$$

Les efforts classiques et les doubles efforts ne peuvent être choisis de manière indépendante puisque  $u_i^*$  et  $\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}$  ne sont pas indépendants car leurs dérivées tangentielles ne peuvent varier de manière indépendante le long de la frontière [26]. Il est possible de réécrire le principe des travaux virtuels en prenant en compte les considérations suivantes ; on note par  $D$  la dérivée normale d'une quantité  $q$ , ( $Dq = \partial q / \partial x_k n_k$ ) et  $D_j$  les dérivées tangentielles ( $D_j q = \partial q / \partial x_j - \partial q / \partial x_k n_k n_j$ ), le principe des travaux virtuels peut donc s'écrire en fonction de  $p_i$  et  $P_i$  comme dans l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \left( \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + \Sigma_{ijk} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_k} \right) d\Omega = \int_{\Omega} G_i u_i^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} (p_i u_i^* + P_i D u_i^*) ds \quad (2.21)$$

En faisant une intégration par parties de l'équation (2.21) on obtient l'équation d'équilibre du milieu second gradient :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \Sigma_{ijk}}{\partial x_j \partial x_k} + G_i = 0 \quad (2.22)$$

En supposant que la frontière est régulière, ce qui veut dire qu'il y a existence et unicité de la normale pour chaque point de la frontière du domaine étudié, on trouve les conditions aux limites suivantes :

$$\sigma_i n_i - n_k n_j D \Sigma_{ijk} - \frac{D \Sigma_{ijk}}{D x_k} n_j - \frac{D \Sigma_{ijk}}{D x_j} n_k - \frac{D n_l}{D n_l} \Sigma_{ijk} n_j n_k - \frac{D n_j}{D n_k} \Sigma_{ijk} = p_i \quad (2.23)$$

et

$$\Sigma_{ijk} n_j n_k = P_i \quad (2.24)$$

Où  $p_i$  et  $P_i$  sont les forces et les doubles forces de surface

- Modélisation numérique en utilisant les modèles second gradient

Comme nous l'avons montré auparavant, l'utilisation des milieux second gradient afin de modéliser la localisation de la déformation permet l'obtention de solutions objectives vis-à-vis du maillage, à l'aide de l'introduction d'une longueur interne. Cette longueur interne est introduite à travers un paramètre constitutif dans la loi de comportement second gradient. Cette méthode a été développée depuis une quinzaine d'années au laboratoire 3SR de Grenoble et est implémentée dans les codes de calcul Lagamine et le code Aster..

Pour citer un exemple El Hassan, Caillerie et Chambon [22] ont étudié la localisation de la déformation dans une barre unidimensionnelle en traction. Dans cette étude, ils considèrent une loi de comportement bilinéaire adoucissante pour la partie premier gradient et une loi élastique linéaire pour la partie second gradient. Ils arrivent ainsi en faisant des développements analytiques à trouver plusieurs solutions, ils les comparent ensuite à des solutions numériques et obtiennent ainsi l'influence des conditions aux limites second gradient sur la solution du problème aux limites.

Dans leurs travaux en 2002, Matsushima et al. [65] continuent le travail de El Hassan en modélisant un problème en déformation plane en utilisant le modèle second gradient local. Ils ont ainsi pu vérifier l'influence du paramètre second gradient sur les largeurs de bandes ainsi que sur la réponse post-pic mécanique.

Bésuelle et al. [16] montrent à travers l'étude de non unicité des solutions obtenues pour un essai biaxial sur un matériau quasi-brutal que le second gradient ne permet pas de restaurer l'unicité des solutions. Il est de plus possible de retrouver certaines observations faites sur des essais expérimentaux telles que la relation entre le nombre de bandes et la contrainte résiduelle. Sieffert et al. dans [90] propose la modélisation du problème de cylindre creux et montre la non unicité de la solution, ceci en utilisant différents paramètres numériques, tels que la discrétisation temporelle et spatiale. Un peu plus tard Caillerie et al. [19] propose une solution analytique du problème du cylindre creux pour un milieu second gradient.

Afin de décrire le comportement du béton, Kotronis et al. [57] considère le milieu second gradient en utilisant le modèle d'endommagement de Mazart [66].

Une version simplifiée des milieux second gradient a été proposée par Fernandes et al. [42], le modèle ainsi obtenu grâce à ses travaux est un modèle dit de second gradient de dilatation. Il permet de réduire le nombre de degrés de liberté ajouté dans la discrétisation éléments finis. L'objectif étant de réduire les temps de calculs afin de rendre les études à portée industrielle acceptable.

## 2.2 Analyse inverse

Expliquer l'analyse inverse consiste à expliquer ce qu'est un problème inverse. D'un point de vue "physique" ou "expérimental", on qualifie de problème inverse [13] toute situation où on souhaite évaluer une certaine grandeur physique  $q$  inaccessible à l'expérience à partir de la mesure d'une autre grandeur  $c$  directement accessible à l'expérience. A partir de là, on peut donc distinguer deux problèmes; les problèmes directes et les problèmes inverses. Dans les problèmes directes, la structure mécanique analysée dépend habituellement des paramètres notés  $q$  (géométrie, caractéristique des matériaux constitutifs, liaisons cinématiques ...). Le problème directe consiste donc à calculer une réponse à partir des données des sollicitations (conditions aux limites)  $X$  et des paramètres  $q$ . Dans la plus part des cas, le problème directe est bien posé, ce qui signifie la réalisation de trois conditions (problème bien posé au sens d'Hadamard) :

- Existence d'une solution
- Unicité de la solution
- Stabilité de la réponse par rapport aux petites perturbations

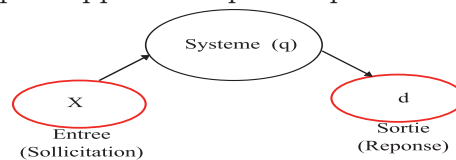


FIGURE 2.2 – Représentation d'un problème directe

Dans le cas des problèmes inverses, on est en général dans une situation où l'on ignore au moins certaines informations du système telles que, la géométrie ou les conditions aux limites, etc. En compensation il faut disposer en plus des entrées, d'informations éventuellement partielles, sur la sortie  $d$  afin de reconstruire au mieux l'information manquante. Le terme inverse rappelle qu'on utilise l'information concernant le modèle physique "à l'envers" connaissant partiellement les sorties on cherche à remonter à certaines caractéristiques, habituellement interne et échappant à la mesure directe.

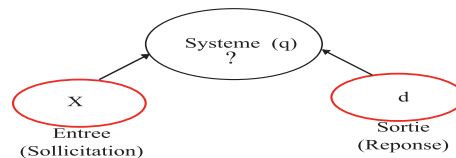


FIGURE 2.3 – Représentation d'un problème inverse

L'analyse de nombreux problèmes de types inverses met en évidence leur caractère mal posé, au sens où au moins une des trois conditions énumérées plus haut n'est pas vérifiée [13].

## 2.2.1 Principe de résolution

Le but est d'identifier les données  $q$  d'un modèle à partir des mesures  $d$  pour des sollicitations  $X$  données (figure 2.3). En général le problème direct est résolu sous la forme  $L(u(q), q) = X$  où  $L$  est un opérateur aux dérivées partielles et  $u(q)$  la solution du problème. Le problème inverse s'inscrit alors sous la forme :

$$\text{trouver } q \in Q_{ad} \text{ tel que } A(q) = d \text{ connaissant } d \in D \quad (2.25)$$

Notons que l'opérateur  $A$  est en général méconnu et non linéaire par rapport à  $d$ . La notion d'analyse inverse a été introduite pour la géophysique et le génie civil par Tarantola [94] et Parker et Santamarina [79],[89]. Ces derniers décrivent deux types d'approches pour résoudre les problèmes inverses :

- Il est possible de résoudre un problème inverse analytiquement par des théories mathématiques si les données du problème sont connues avec précision. Il est donc possible d'obtenir les paramètres du sol en inversant les équations du modèle constitutif. Cette méthode est appelée, analyse inverse par méthode analytique inverse.
- Il devient difficile de trouver une solution analytique du problème inverse si les données du problème sont incomplètes ou/et incertaines. La solution est sensible aux données et aux erreurs sur ces données. Santamarina [89] préconise alors une résolution numérique, basée sur des simulations successives par éléments finis à partir de paramètres mécaniques optimisés par ailleurs. Cette méthode est appelée analyse inverse par méthode numérique directe.

Pour citer un exemple simple de l'analyse inverse par méthode analytique simple, considérons le problème de la détermination du module d'Young lors d'un essai de traction uniaxial, en supposant que le comportement du matériau est élastique linéaire homogène et isotrope. On impose une contrainte  $\sigma$ , l'allongement  $\Delta L$  correspondant est mesuré, la loi de Hook permet dans ce cas de déduire le module d'Young  $E$

$$\sigma = \frac{\Delta L}{L} E \implies E = \sigma \frac{L}{\Delta L} \quad (2.26)$$

Dans le cas de l'analyse inverse par méthode numérique directe, l'opérateur  $A$  mentionné ci-dessus n'est pas linéaire et trouver des solutions analytiques devient impossible, on cherche donc des quasi-solutions du système  $A(q) = d$  en un certain sens. Le problème d'inversion ou d'identification se transforme en un problème de minimisation d'une fonction, dite fonction de coût ou erreur mesurant la différence entre les mesures et les prédictions  $d$  de  $A(q)$  ([9], [13]). Maier et Giorda [63] montrent qu'une résolution par minimisation directe de la "distance" entre les mesures in situ et des quantités numériques correspondantes est préférable puisqu'elle évite l'inversion des équations d'analyse de contrainte.

$$\min_{q \in Q_{ad}} f(q) \quad (2.27)$$



$$f(q) = \|A(q) - d\| \quad (2.28)$$

La forme de la fonction  $f$  est variée mais, dans la plus part des cas le choix se porte sur une fonction de type moindres carrés. En règle générale, rien n'assure la convexité de la fonction  $f$  par rapport aux paramètres  $q$  de la fonction choisie. La forme plus ou moins régulière de la fonction  $f$  est en partie à relier à l'unicité de la solution du problème inverse.

## 2.2.2 Technique de minimisation

Le problème d'identification se ramène donc à un problème de minimisation d'une fonction non linéaire. Les méthodes d'optimisation peuvent être divisées en deux grandes catégories : les méthodes avec ou sans utilisation de gradient de la fonction coût  $f$ .

Les algorithmes sans gradient tels que les méthodes génétiques permettent de minimiser des fonctions coût dont la forme peut être très complexe [51]. Ces méthodes ne permettent pas seulement d'avoir un minimum local mais aussi un minimum global de la fonction  $f$  dans l'espace des  $Q_{ad}$ . Néanmoins ce type d'algorithme demandent un très grand nombre d'évaluations de la fonction coût. Les temps de calculs deviennent très volumineux si  $f$  est issue de calculs numériques.

Les algorithmes basés sur le calcul de gradient sont souvent utilisés en pratique, puisqu'ils permettent d'accélérer la convergence. Ces algorithmes présentent en revanche le risque de ne fournir qu'un minimum local selon le choix initial des paramètres. Une présentation des différentes méthodes d'optimisation avec gradient peut être trouvée dans les ouvrages de Gill et al. [44] et Bonnans et al. [12]

Remarquons que pour bien poser un problème d'optimisation il est important d'analyser le problème et d'effectuer un certain nombre de choix :

- Choix des variables du problème  
Avant d'entamer l'analyse inverse il est essentiel de connaître les paramètres intéressants à optimiser .
- Choix de l'espace de recherche  
Après sélection des paramètres il faut définir le domaine de variation de ses paramètres, on détermine ainsi l'espace de recherche. Il est facile de remplir cette condition, puisque l'intervalle de définition des variables est généralement limité par l'intervalle des valeurs admissibles.
- Choix de la fonction coût  
Comme présenté ci-dessus il est important de définir une fonction coût qui permet de rendre compte de la pertinence des solutions obtenues. La qualité de cette solution

est directement liée au choix de cette fonction. Ce point délicat est peu abordé dans la littérature et fait l'objet de développements actuels en optimisation.

- Choix de la méthode d'optimisation

Le choix de cette méthode dépend essentiellement du problème à traiter. Il est conseillé d'utiliser les méthodes déterministes et énumératives s'il est possible d'évaluer la fonction coût très rapidement ou si la forme de cette fonction est connue. Les cas les plus complexes seront traités par des méthodes non déterministes.

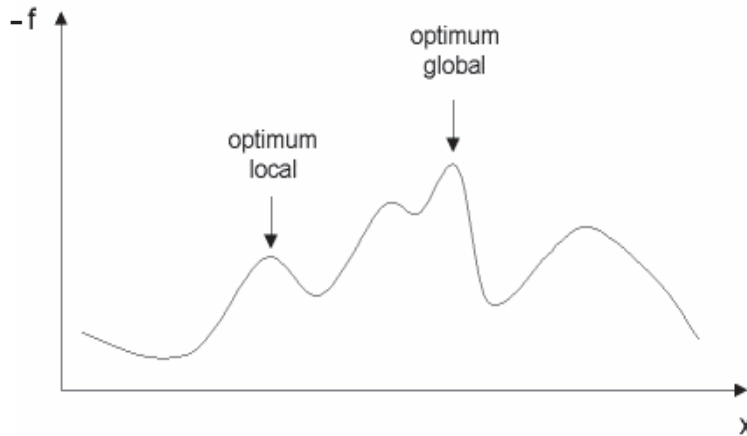


FIGURE 2.4 – Exemple de fonction d'erreur

Nous présentons dans ce qui suit les grandes familles d'algorithmes d'optimisation.

### 2.2.2.1 Les méthodes stochastiques

Dans ces méthodes, l'approche de l'optimum est obtenue par un processus stochastique. Ces méthodes prennent en compte les incertitudes sur les données mesurées ou sur la variation des propriétés mécaniques. Elles permettent d'obtenir des informations sur l'exactitude des paramètres identifiés ou sur la pertinence de l'information a priori. Citons parmi ces méthodes, les méthodes de Monte Carlo ([74], [88]), elles consistent à choisir à chaque itération un jeu de valeurs au hasard de l'espace de recherche. La fonction erreur est évaluée pour ces valeurs et comparée à la valeur précédente. Si elle est meilleure elle est conservée, sinon on maintient les valeurs des paramètres précédents, ce processus se poursuit jusqu'à ce qu'une solution satisfaisante soit obtenue. Ces méthodes sont très coûteuses étant donné leur champ de recherche aléatoire, elles ne peuvent donc être utilisées que si l'on dispose d'une puissance de calcul importante.

Les algorithmes génétiques dérivent des méthodes de Monte Carlo sauf que l'évolution de l'algorithme est moins aléatoire. Ces algorithmes exploitent efficacement l'informa-

tion obtenue précédemment pour prédire la position des prochains points à explorer. A chaque génération un ensemble d'individus est créé en utilisant une partie des meilleurs éléments de la génération précédente [45], [62]. Il est essentiel de porter une attention particulière au choix d'individus, un nombre petit conduira à une convergence prématurée vers un minimum et un nombre grand induira des temps de calculs conséquents.

Les méthodes stochastiques travaillent directement à partir d'un échantillon de paramètres de données, que ces données soient bruitées ou pas elles convergent vers un optimum, ce faisant, elles n'utilisent que la valeur de la fonction erreur, tandis que les méthodes de gradient comme nous le verrons plus tard nécessitent que la fonction erreur soit continue et dérivable.

### 2.2.2.2 Les méthodes énumératives

Un algorithme énumératif permet dans un espace de recherche d'évaluer la fonction à optimiser en chaque point de l'espace de solution. Une comparaison est faite sur l'ensemble des combinaisons possibles. La solution optimale est celle pour laquelle la fonction erreur est la plus faible. L'avantage évident de ces méthodes et qu'elles atteignent l'optimum global et n'utilisent que le calcul de la fonction erreur. Leur inconvénient majeure est qu'elles nécessitent un nombre souvent très important de calcul de la fonction coût, surtout si la dimension du domaine de recherche ou de faisabilité est importante. Pour palier à cet inconvénient majeur, les méthodes énumératives sont souvent couplées avec d'autres méthodes d'optimisation. Par exemple, une optimisation continue est d'abord effectuée pour dégrossir le problème, puis la solution continue trouvée est affinée parmi les variables discrètes existantes au voisinage de la solution continue.

### 2.2.2.3 Les méthodes déterministes

Ces méthodes permettent d'avoir une estimation de la solution optimale en utilisant au mieux l'information, a priori connue sur l'espace de recherche. Elles correspondent principalement aux méthodes de gradient qui n'utilisent aucun concept statistique mais nécessitent une hypothèse sur la fonction à optimiser. La fonction à optimiser doit être continue et dérivable en tout point de l'espace de recherche. La performance de telle méthodes repose essentiellement sur l'estimation précise du gradient de la fonction  $f$ , c'est le point le plus délicat de la mise en œuvre de la résolution.

Plusieurs techniques permettent de calculer le gradient de la fonction  $f$ . Dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisé la méthode de différence finie dont nous rappelons le principe [59] ci-dessous :

Dans le cas d'un problème linéaire directe le problème s'écrit :

$$K(q)u(q) = F \quad (2.29)$$

Où  $K$  représente par exemple la matrice de rigidité d'un calcul élastique par élément finis. L'objectif est de minimiser la fonction  $f(u(q), q)$  par un algorithme avec gradient.  $u$  est la solution du problème linéaire directe. Le gradient de la fonction  $f$  s'écrit :

$$\nabla_{q_i} f(u(q), q) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (2.30)$$

$\frac{\partial u}{\partial q_i}$  correspond à la variation du champ de la solution  $u$  selon le paramètre  $q_i$ . Cette quantité est également appelée sensibilité selon  $q_i$  et sera notée dans ce qui suit  $\delta_{q_i} u$ .

Différences finies

Cette méthode est simple à implémenter, il suffit d'obtenir la sensibilité en résolvant une seconde fois le problème directe avec le paramètre  $q_i + \Delta q_i$ , la sensibilité s'écrit :

$$\frac{du}{dq_i} = \delta_{q_i} u = \frac{u(q_i + \Delta q_i) - u(q_i)}{\Delta q_i} \quad (2.31)$$

Nous avons besoin de résoudre deux fois le problème directe afin d'avoir une estimation de la sensibilité. Pour  $p$  paramètres,  $p + 1$  problèmes directes doivent être résolus pour obtenir le gradient de la fonction. Cette méthode devient très coûteuse en terme de calculs si le problème directe est non linéaire ou s'il y a un grand nombre de paramètres. Il est important d'apporter une attention particulière au pas, celui-ci dépend généralement du paramètre  $q_i$ . Le schéma risque de devenir vite instable.

Pour minimiser la fonction erreur en utilisant les méthodes de gradient, il est nécessaire de calculer le Hessien qui fait intervenir la dérivée seconde de  $f$ . Pour cela, différents algorithmes peuvent être utilisés. Nous pouvons citer parmi ces algorithmes, la méthode de plus grande pente [77], la méthode Newton-Raphson et de Quasi-Newton, l'algorithme de Levenberg-Marquardt [86]... Cette dernière est efficace et robuste, Lecampion et al. [60] l'ont utilisé pour estimer les paramètres d'un modèle de sol viscoplastique à partir de la convergence d'un tunnel circulaire dans une roche à grande profondeur.

Les méthodes d'analyses inverses de manière générale n'assurent pas l'existence et l'unicité de la solution. Les erreurs de mesure ainsi que les hypothèses faites sur la loi mécanique utilisée pour le modèle, font que l'analyse inverse ne permet pas de garantir l'unicité et l'existence de la solution. Il n'est de ce fait pas possible de savoir à l'avance si le modèle permettra de reproduire les données ou pas. Il est donc nécessaire de prendre en compte les erreurs liées à la modélisation ainsi que les incertitudes de mesure afin de garantir la solution du problème.

## 2.3 Loi constitutive macroscopique

Nous présentons dans cette section la loi constitutive premier gradient qui a été utilisée pour décrire le comportement du grès. La loi Plasol qui a été choisie [4] est une loi élasto-plastique de type Drucker-Prager avec deux mécanismes d'écrouissage possibles, le durcissement ou/et l'adoucissement. Le choix de cette loi est justifiée par le fait qu'elle offre une possibilité de contrôle des caractéristiques (non associativité, écrouissage), avec un nombre de paramètres relativement réduit.

La loi de comportement Plasol est implémentée dans le code Lagamine de Liège dans un cadre de formulation en grande déformation (formulation Lagrangienne actualisée). Nous rappelons que les dérivées de Jaumann sont utilisées afin d'avoir des dérivations objectives (vis-à-vis des rotations solides). Dans ce qui suit, les contraintes de compression sont considérées négatives et les contraintes de traction positives. La partie élastique de la loi s'écrit :

$$\mathbb{C}_{ijkl}^e = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (2.32)$$

Où  $K$  le module d'incompressibilité et  $G$  le module de cisaillement sont reliés au module d'Young et le coefficient de Poisson par :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.33)$$

La limite entre la partie élastique et la partie plastique est définie par une surface d'écoulement qui représente un cône à section circulaire dans l'espace des contraintes principales. Cette surface est décrite à l'aide de la fonction  $f$  (2.34)

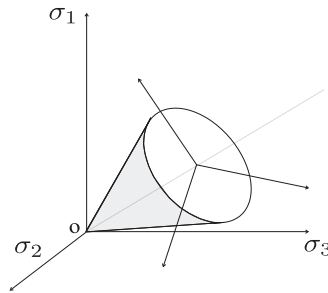


FIGURE 2.5 – Critère de Drucker-Prager dans l'espace des contraintes principales

$$f = II_{\hat{\sigma}} + mI_{\sigma} - k = II_{\hat{\sigma}} + m \left( I_{\sigma} - \frac{3c}{\tan \varphi_C} \right) \quad (2.34)$$

Où  $m$  et  $k$  sont définis par

$$\begin{cases} m = \frac{2 \sin \varphi_c}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)} \\ k = \frac{6c \cos \varphi_c}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)} \end{cases} \quad (2.35)$$

$\varphi_c$  est l'angle de frottement (en compression triaxiale) et  $c$  la cohésion.  $I_{\sigma}$  est le premier invariant de contrainte, et  $II_{\hat{\sigma}}$  représente le deuxième invariant de la contrainte déviatorique.

$$I_{\sigma} = \sigma_{ii} \quad (2.36)$$

$$II_{\hat{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij}} \quad (2.37)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_{\sigma}}{3} \delta_{ij} \quad (2.38)$$

La loi de comportement est non associée et l'angle de dilatance  $\Psi$  est introduit à partir du potentiel plastique  $g$ , défini par :

$$g = II_{\hat{\sigma}} + I_{\sigma} m' \quad (2.39)$$

$$\text{avec } m' = \frac{2 \sin \Psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \Psi)}.$$

L'écoulement plastique s'écrit donc :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.40)$$

Où l'incrément de la déformation plastique  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  s'écrit sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \left( m' \delta_{ij} + \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{2II_{\hat{\sigma}}} \right) \quad (2.41)$$

Notons que si  $m = m'$  alors l'écoulement plastique est défini comme associé, dans le cas contraire la plasticité est non associée. La dilatance peut être définie constante ou variable selon la loi de Taylor, qui relie l'angle de dilatance  $\Psi$  à l'angle de frottement  $\varphi_c$ .

$$\varphi_c - \Psi = \text{constante} \quad (2.42)$$

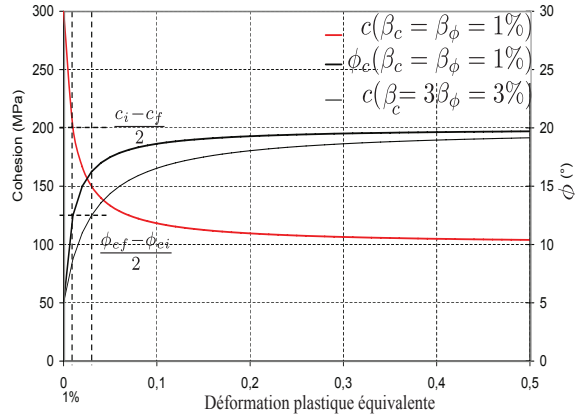
Il est possible d'avoir deux mécanismes d'écrouissage avec la loi Plasol, du durcissement sur l'angle de frottement et/ou de l'adoucissement sur la cohésion. Ces deux processus

sont indépendants et peuvent être utilisés simultanément ou indépendamment. La cohésion et le frottement varient de manière hyperbolique en fonction de la déformation plastique équivalente de Von Mises de la manière suivante :

$$\varphi_c = \varphi_{c_i} + \frac{(\varphi_{c_f} - \varphi_{c_i})\varepsilon_{eq}^p}{\beta_{\varphi_c} + \varepsilon_{eq}^p} \quad (2.43)$$

$$c = c_0 + \frac{(c_f - c_0)\varepsilon_{eq}^p}{\beta_c + \varepsilon_{eq}^p} \quad (2.44)$$

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{eq}^p \dot{\varepsilon}_{eq}^p} \quad , \quad \varepsilon_{eq}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt \quad (2.45)$$



**FIGURE 2.6** – Exemple de la variation de la cohésion et du frottement en fonction de la déformation plastique équivalente

Les paramètres  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$  permettent de contrôler la vitesse d'évolution de la cohésion et du frottement. Quand la déformation plastique équivalente est égale à  $\beta_c$  ou  $\beta_\varphi$  cela veut dire respectivement que la cohésion ou le frottement est égal à la moyenne entre sa valeur initiale et sa valeur finale. Il est possible de montrer qu'il existe une relation entre l'angle de frottement en compression  $\varphi_c$  et l'angle de frottement en extension  $\varphi_e$ , Barnichon [4] et Desrues [35]. Cette relation s'écrit :

$$\sin \varphi_e = \frac{3 \sin \varphi_c}{3 - 2 \sin \varphi_c} \quad (2.46)$$

L'expression (2.46) montre que si  $\sin \varphi_e = 1$ , la valeur limite de l'angle de frottement en compression est de  $36.8^\circ$ , cette limitation est valable à la fois pour des milieux purement frottants et pour des milieux cohésifs.

## 2.4 Loi constitutive second gradient

Nous présentons ci-dessous la loi second gradient qui est utilisée. C'est une loi élastique linéaire isotrope qui peut s'écrire sous la forme [73] :

$$W = a_1 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_k} + a_2 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{ki}}{\partial x_k} + a_3 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_k} + a_4 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} + a_5 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{ji}}{\partial x_k} \quad (2.47)$$

Nous considérons pour les doubles contraintes  $\Sigma_{ijk}$  la dérivée de Jaumann afin d'obtenir une dérivée objective. Cette dérivée s'écrit :

$$\overset{\nabla}{\Sigma}_{ijk} = \dot{\Sigma}_{ijk} + \Sigma_{ljk} R_{li} + \Sigma_{imk} R_{mj} + \Sigma_{ijp} R_{pk} \quad (2.48)$$

On peut donc écrire :

$$\begin{bmatrix} \overset{\nabla}{\Sigma}_{111} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{112} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{121} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{122} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{211} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{212} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{221} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{12345} & 0 & 0 & a^{23} & 0 & a^{12} & a^{12} & 0 \\ 0 & a^{145} & a^{145} & 0 & a^{25} & 0 & 0 & a^{12} \\ 0 & a^{145} & a^{145} & 0 & a^{25} & 0 & 0 & a^{12} \\ a^{23} & 0 & 0 & a^{34} & 0 & a^{25} & a^{25} & 0 \\ 0 & a^{25} & a^{25} & 0 & a^{34} & 0 & 0 & a^{23} \\ a^{12} & 0 & 0 & a^{25} & 0 & a^{145} & a^{145} & 0 \\ a^{12} & 0 & 0 & a^{25} & 0 & a^{145} & a^{145} & 0 \\ 0 & a^{12} & a^{12} & 0 & a^{23} & 0 & 0 & a^{12345} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \dot{v}_{11} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{11} / \partial x_2 \\ \partial \dot{v}_{12} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{12} / \partial x_2 \\ \partial \dot{v}_{21} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{21} / \partial x_2 \\ \partial \dot{v}_{22} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{22} / \partial x_2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Les termes que l'on retrouve dans l'expression ci-dessus peuvent s'écrire en fonction de ceux qu'on retrouve dans l'équation (2.49) :

$$\begin{aligned} a^{12345} &= 2(a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5) \\ a^{23} &= a^2 + 2a^3 \\ a^{12} &= a^1 + a^2/2 \\ a^{145} &= a^1/2 + a^4 + a^5/2 \\ a^{25} &= a^2/2 + a^5 \\ a^{34} &= 2(a^3 + a^4) \end{aligned} \quad (2.50)$$



Pour obtenir (2.49), une hypothèse est faite sur les termes (2.50), un seul terme n'est pas nul.

$$\begin{array}{c}
 \nabla \\
 \Sigma_{111} \\
 \nabla \\
 \Sigma_{112} \\
 \nabla \\
 \Sigma_{121} \\
 \nabla \\
 \Sigma_{122} \\
 \nabla \\
 \Sigma_{211} \\
 \nabla \\
 \Sigma_{212} \\
 \nabla \\
 \Sigma_{221} \\
 \nabla \\
 \Sigma_{222}
 \end{array}
 =
 \begin{bmatrix}
 D & 0 & 0 & 0 & 0 & D/2 & D/2 & 0 \\
 0 & D/2 & D/2 & 0 & -D/2 & 0 & 0 & D/2 \\
 0 & D/2 & D/2 & 0 & -D/2 & 0 & 0 & D/2 \\
 0 & 0 & 0 & D & 0 & -D/2 & -D/2 & 0 \\
 0 & -D/2 & -D/2 & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\
 D/2 & 0 & 0 & -D/2 & 0 & D/2 & D/2 & 0 \\
 D/2 & 0 & 0 & -D/2 & 0 & D/2 & D/2 & 0 \\
 0 & D/2 & D/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & D
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 \partial \dot{v}_{11} / \partial x_1 \\
 \partial \dot{v}_{11} / \partial x_2 \\
 \partial \dot{v}_{12} / \partial x_1 \\
 \partial \dot{v}_{12} / \partial x_2 \\
 \partial \dot{v}_{21} / \partial x_1 \\
 \partial \dot{v}_{21} / \partial x_2 \\
 \partial \dot{v}_{22} / \partial x_1 \\
 \partial \dot{v}_{22} / \partial x_2
 \end{array}
 \quad (2.51)$$

Il est possible à partir d'une analyse dimensionnelle simple de montrer qu'une longueur interne a été introduite au problème, ceci a été démontré analytiquement par Chambon et al. [22] pour un problème mono-dimensionnel.

### Analyse numérique du modèle second gradient

Afin de procéder à une implémentation d'une loi second gradient dans un code éléments finis, il est nécessaire d'appliquer le principe des travaux virtuels, équation (2.21). Pour cela, il faut utiliser des éléments de type  $C^1$ . Afin d'éviter cette contrainte, il est possible d'introduire une formulation affaiblie de l'équation (2.21) en utilisant les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_{ij}$ , ce qui conduit aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases}
 \int_{\Omega} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \lambda_{ij} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - v_{ij}^* \right) + \Sigma_{ijk} \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k} \right] dv = \int_{\Omega} g_i u_i^* dv + \int_{\partial\Omega} (p_i u_i^* + P_i D u_i^*) ds \\
 \int_{\Omega} \lambda_{ij}^* \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - v_{ij} \right) dv = 0
 \end{cases} \quad (2.52)$$

Une description complète du traitement numérique est présentée dans [26]. Le problème est discrétisé en temps et pour chaque pas de temps un algorithme de Newton-Raphson est appliqué. L'élément finis second gradient est composé de 8 noeuds pour le champ de déplacement  $u_i$ , de 4 noeuds pour le gradient de déplacement, et un seul noeud pour le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_{ij}$ . L'élément a été introduit dans le code éléments finis Lagamine, développée à l'université de Liège en Belgique [27]

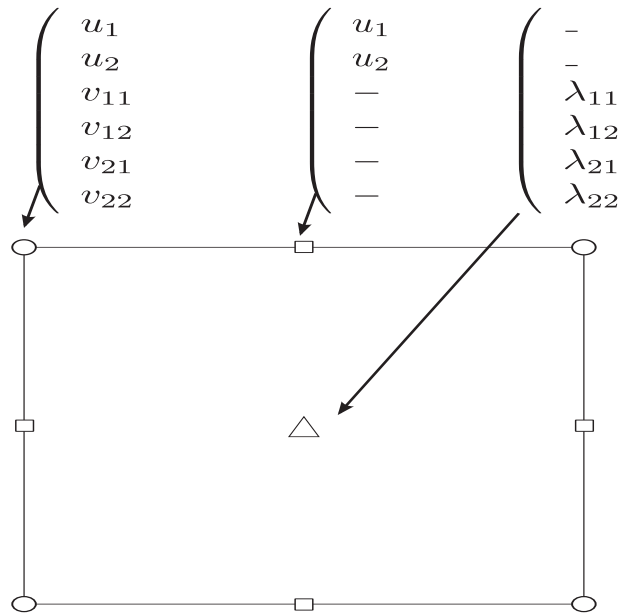


FIGURE 2.7 – Les variables nodales utilisées dans l'élément fini second gradient

Afin de clore cette section consacrée aux modèles second gradients locaux, nous rappelons les deux principaux avantages liés à l'utilisation de ces modèles.

- Les modèles second gradient que nous avons présentés étant locaux, à la différence des modèles second gradient non locaux où le gradient est défini à partir du point matériel et du voisinage de ce point, ils permettent de pouvoir associer n'importe quelle loi premier gradient à la loi second gradient. Cette théorie peut donc être adaptée à divers modèles, comme les modèles élasto-plastique, les modèles d'endommagement ou les modèles hypoplastiques.
- D'un point de vue numérique, les algorithmes d'intégration utilisés habituellement pour les modèles classiques peuvent être aussi utilisés pour les modèles second gradient. L'intégration de la loi reste locale par exemple.

Il est important de garder à l'esprit que cette théorie présente un inconvénient au niveau numérique, qui consiste en l'introduction de nouvelles inconnues, ce qui implique des degrés de liberté en plus et un temps de calcul accru. De nos jours il est de plus en plus facile de surmonter cette difficulté étant données les avancées en matière de moyens de calculs.

## 2.5 Résultats expérimentaux

La localisation de la déformation est souvent observée dans les géomatériaux. Les mesures du champ de déformation dans le temps sont particulièrement intéressantes pour étudier la localisation de la déformation (initiation des bandes de localisation) et le régime post-localisé. Certains outils ont été développés pour les sols (par exemple, l'échantillon de sable en condition de déformation plane [37] ou condition triaxiale en utilisant la tomographie à rayon X [93]). Ces développements restent difficiles dans le cas des roches, ceci est dû principalement aux fortes contraintes de confinement qu'il est nécessaire d'utiliser afin de pouvoir reproduire les conditions in-situ.

Nous présenterons dans ce qui suit quelques résultats obtenus dans le nouvel appareil triaxial vrai, qui permet la visualisation de l'échantillon au cours du chargement. D'autres appareils triaxiaux vrais existent mais ils ne permettent pas d'observer l'échantillon au cours du chargement, cette observation ne peut être faite qu'à la fin de l'essai, ([47]). De plus, dans ce nouvel appareil, la rupture en surface peut se développer et se propager sans restriction. Ceci est possible en déformation plane ou pour un essai triaxial. La condition de déformation plane est obtenue en contrôlant indépendamment la contrainte intermédiaire. La visualisation de l'échantillon est possible grâce à un hublot au contact d'une des faces de l'échantillon prismatique qui est orthogonale à la direction de déformation plane. Étant donné la condition de déformation plane, la déformation de cette surface est a priori représentative de la déformation dans tout l'échantillon, avant et après localisation. Il est donc possible d'obtenir l'évolution de la déformation dans l'échantillon à l'aide des techniques de corrélation d'images (DIC). Avant de procéder à la description de la cellule, nous présentons l'enveloppe de contrainte pour le grès de Vosges obtenue par Pierre Bésuelle durant ses travaux de thèse [14]

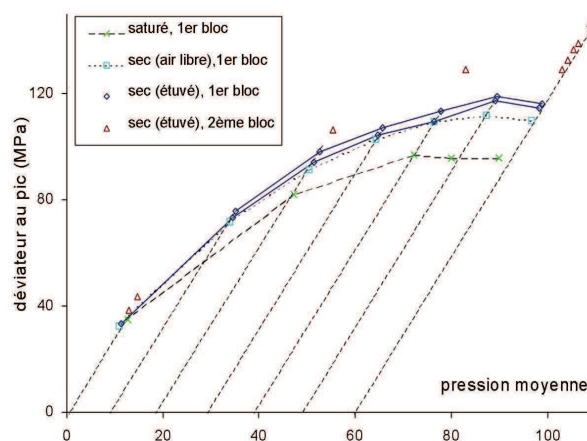


FIGURE 2.8 – Enveloppe des pics de contraintes du grès de Vosges

### 2.5.1 Description de la cellule de l'appareil triaxial vrai

L'appareil triaxial vrai a été développé au laboratoire 3SR de Grenoble, dans le but de caractériser l'initiation de la localisation et le régime post-localisé dans les roches. Il est possible à l'aide de cet appareil d'appliquer 3 contraintes indépendantes dans les trois directions de l'espace, tout en observant l'échantillon au cours du chargement. Les surfaces perpendiculaires aux contraintes majeure et intermédiaire sont en contact avec des plateaux rigides qui sont mus par deux pistons, tandis que les deux surfaces perpendiculaires à la contrainte mineure sont libres de se déformer puisque la contrainte est appliquée à partir d'un fluide de confinement via une membrane souple.

Comme les bandes de localisation et les fissures sont en général parallèles à la contrainte intermédiaire (du moins si les axes d'anisotropie du matériau sont alignés avec les directions de contraintes principales), l'échantillon a la liberté de se déformer et de se rompre sans contrainte cinématique imposée sur les faces latérales de l'échantillon. De plus une des deux surfaces perpendiculaires à la contrainte intermédiaire est en contact avec un hublot qui permet d'observer l'échantillon au cours du chargement. Les deux pistons peuvent être contrôlés en contraintes ou en déplacement. Il est possible de contrôler la contrainte intermédiaire afin d'avoir une déformation nulle dans cette direction, ce qui permet de satisfaire les conditions de déformation plane. Dans ce cas précis, les analyses théoriques en bifurcation montrent que la déformation de la surface en contact avec le hublot est représentative de la déformation dans tout l'échantillon. Il est vérifié en tomographie à rayons X post-mortem que les fissures sont bien parallèles à la direction de contrainte intermédiaire.

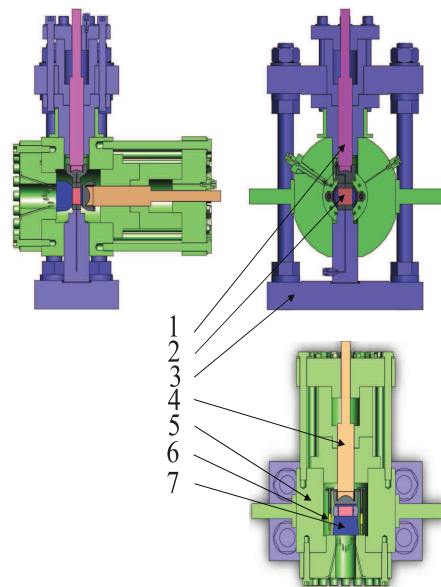
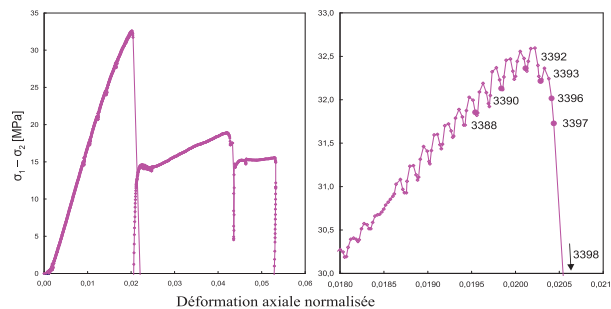


FIGURE 2.9 – Schéma de principe l'appareil triaxial vrai du laboratoire 3SR

Un schéma simplifié de l'appareil est représenté en figure 2.9. Le piston hydraulique axial (1) permet d'appliquer un chargement axial sur l'échantillon (2). Le piston axial se déplace à l'intérieur d'un cadre axial flottant (3), si le piston descend, le cadre et l'embase de chargement se déplace vers le haut du même ordre de grandeur. De cette manière, si l'échantillon se déforme de façon homogène le centre de l'échantillon ne bouge pas ou peu. Le piston horizontal (4) permet d'appliquer la contrainte intermédiaire. Celle-ci est compensée par rapport à la pression de confinement à l'intérieur de la chambre de confinement (5). Le piston peut être contrôlé en déplacement à l'aide du capteur de déplacement interne (6). La contrainte mineure est imposée grâce au fluide de confinement sur les deux surfaces latérales de l'échantillon. Ce dernier est séparé du fluide à l'aide d'une membrane en silicone. Cette membrane couvre à la fois l'échantillon et les 4 embases de chargement. De cette sorte, il y a un contact direct entre l'échantillon et le hublot.

La surface visible de l'échantillon est éclairée à travers le hublot en saphir avec une lumière provenant de LED, et transmise sur la surface de l'échantillon par l'intermédiaire de fibres optiques; ce qui donne une lumière homogène et de qualité pour la prise de photographies. Les photographies sont prises avec un appareil haute définition (résolution 6080 x 4044 pixels). La corrélation d'images est réalisée à partir des photographies afin de déduire le champ de déformation incrémentale au cours du chargement. Pour en savoir plus sur les méthodes de corrélation d'image, le lecteur peut se référer à [48]



**FIGURE 2.10** – Évolution de la contrainte axiale en fonction du raccourcissement axial normalisé. Nous retrouvons à gauche la courbe globale et à droite un zoom autour du pic de contrainte. Les numéros correspondent aux prises de photos. Les oscillations sur la courbe de droite proviennent d'une imperfection de la régulation du piston axial dû au générateur de pression (paramètre de réactivité)

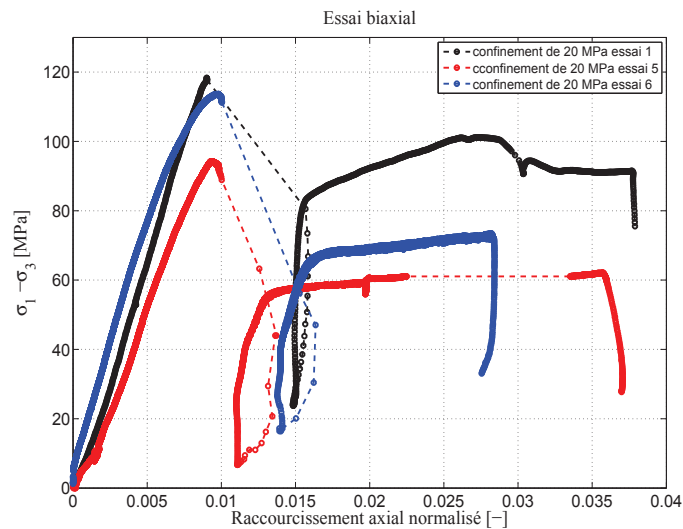
La capacité de la cellule en pression de confinement est de 100 MPa, le piston axial peut appliquer une force de 500 kN et le piston horizontal une force de 700 kN, ce qui correspond à une contrainte différentielle par rapport à la contrainte de confinement de 670 MPa et 530 MPa, respectivement, pour un échantillon de dimension  $L \times H \times P$  de  $25 \times 50 \times 30$  mm.

### 2.5.1.1 Résultats

Il est possible d'extraire plusieurs données des essais menés sur l'appareil triaxial vrai, nous montrerons ici que les résultats obtenues sur des essais biaxiaux menés par Pierre Bésuelle et Patrizia Lanatà [58], dans le cadre de la thèse qui porte sur la caractérisation de la localisation de la déformation dans des roches poreuses en conditions triaxiales vraies. Sont présentées ci-dessous les données utilisées dans le cadre de cette thèse.

- Courbe de chargement

Il est possible d'obtenir la variation de la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale. La mesure du raccourcissement axial a été corrigée deux fois, une première correction a été apportée grâce à la détermination de la rigidité de la cellule de l'appareil, puis la deuxième correction est effectuée à partir du champ de déplacement déduit de la corrélation d'images (de manière à avoir coïncidence entre les deux mesures et de corriger les artefacts inhérents aux mesures de déplacement externes).



**FIGURE 2.11** – Courbes de chargement de trois essais biaxiaux réalisés avec un confinement de 20 MPa sur un grès de Vosges

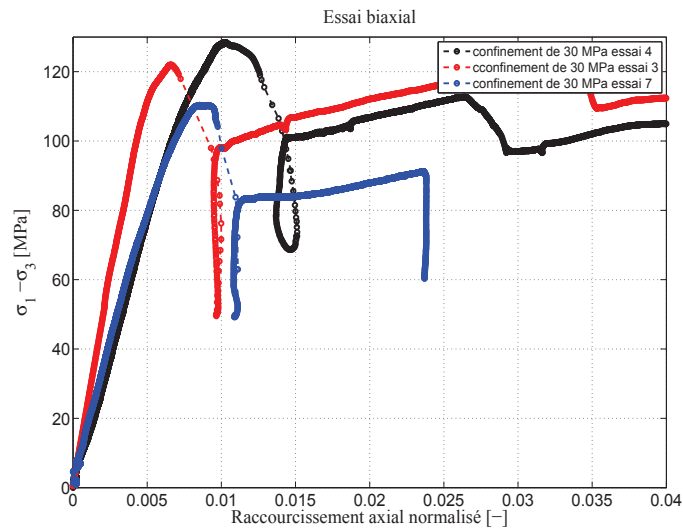


FIGURE 2.12 – Courbes de chargement de trois essais biaxiaux réalisés avec un confinement de 30 MPa sur un grès de Vosges

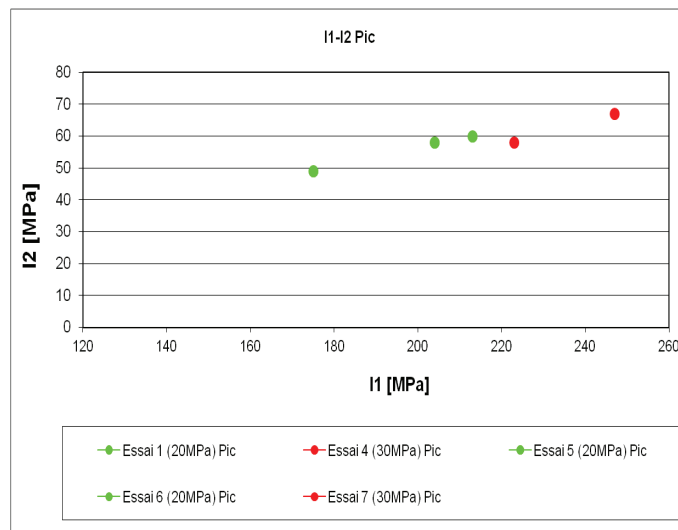
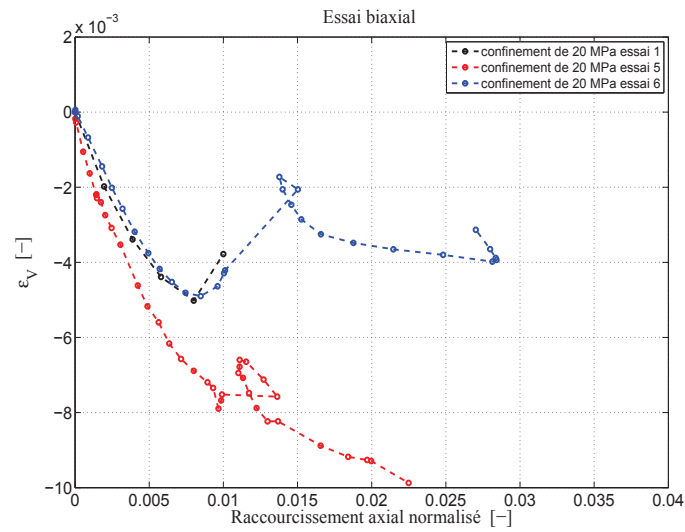


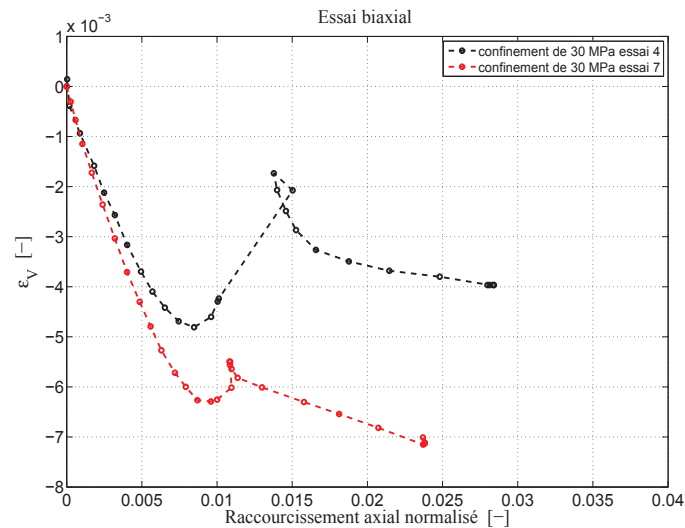
FIGURE 2.13 – pics de contraintes dans le diagramme I1-I2

- Courbe de déformation volumique

Nous retrouvons ci-dessous l'évolution de la déformation volumique globale de l'échantillon en fonction de la déformation axiale. La déformation volumique globale a été obtenue à partir du champ cinématique mesuré par corrélation d'images.



**FIGURE 2.14** – Courbes de déformation volumique pour trois essais biaxiaux réalisés avec un confinement de 20 MPa

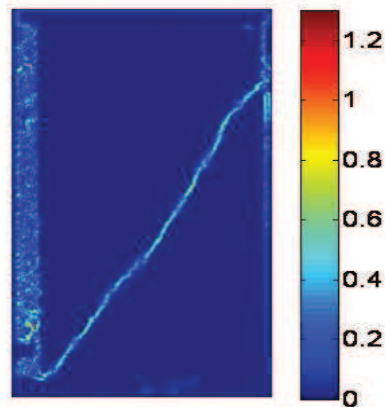


**FIGURE 2.15** – Courbes de déformation volumique pour trois essais biaxiaux réalisés avec un confinement de 30 MPa

- Caractérisation de la bande

L'analyse par corrélation d'images permet d'avoir une caractérisation fine de la largeur de la bande, il est de ce fait possible de déduire la largeur de la bande et son orientation à partir l'état de déformation dans l'échantillon. Les photographies utilisées pour la corrélation d'images ont une taille de pixel qui représente de  $9 \mu\text{m}$  et la fenêtre de corrélation est constituée de 20 pixels. La largeur de bande minimale qu'il est possible de mesurer avec cette résolution est de l'ordre de 0.18 mm.

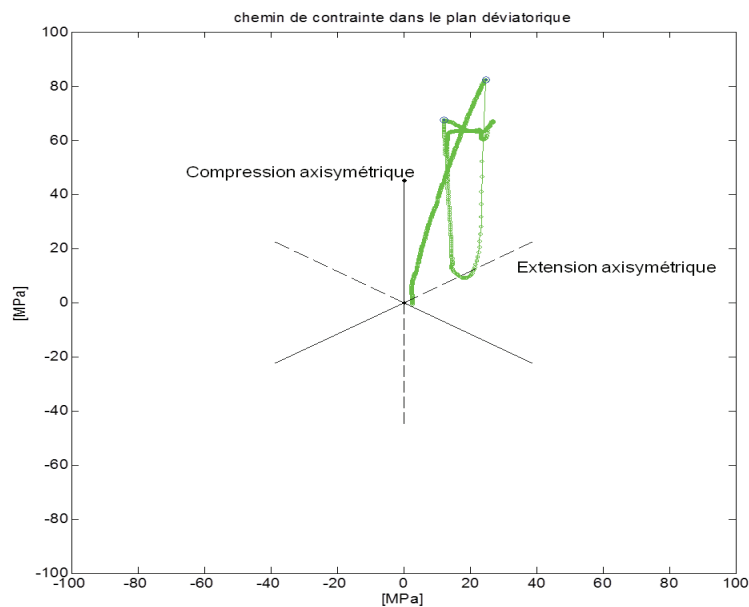




**FIGURE 2.16** – Second invariant de la déformation pour un essai biaxial avec un confinement de 20 MPa

- Chemin de contraintes dans le plan déviatorique

Il est possible de déduire le chemin de contrainte dans le plan déviatorique (plan orthogonal à la trisectrice dans le plan des contraintes principales) pour tous les essais. Ce chemin suivi est typique de l'essai biaxial comme on peut le voir sur la figure ci-dessous ; avec une évolution (jusqu'au pic de contrainte axiale) intermédiaire entre le chemin de compression axisymétrique et d'extension axisymétrique.



**FIGURE 2.17** – Chemin de contraintes pour un essai biaxial avec un confinement de 30 MPa

Étant donnée la dispersion des données expérimentales nous avons choisis d'utiliser pour la procédure d'identification, les essais 4 et 6 respectivement à 30 et 20 MPa.

Nous remarquons en comparant les orientations de bandes mesurées expérimentalement que dans la plus part des essais, on observe une seule bande au niveau du pic. Si cette bande persiste au cours de l'essai, elle garde la même orientation. Cependant si d'autres bandes apparaissent, l'orientation change légèrement, ce qui peut être expliqué par le fait que le champ de contrainte est perturbé. Pour la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux nous prendrons en compte uniquement les orientations de bandes au pic de contraintes. Tout d'abord parce que le pic correspond approximativement au début de l'apparition de la bande et secundo car la localisation au niveau numérique survient dans la plus part des cas elle aussi au niveau du pic de contraintes.

Les largeurs de bandes observées expérimentalement peuvent être mesurées grâce à l'analyse par corrélation d'images. Ces largeurs varient d'un essai à l'autre mais restent dans un intervalle de 0.5 mm à 0.75 mm pour le grès.

Sont présentés ci-dessous le nombre de bandes ainsi que leurs orientations au niveau du pic et du palier pour les essais 4 (figure 2.18) et 6 (figure 2.19).

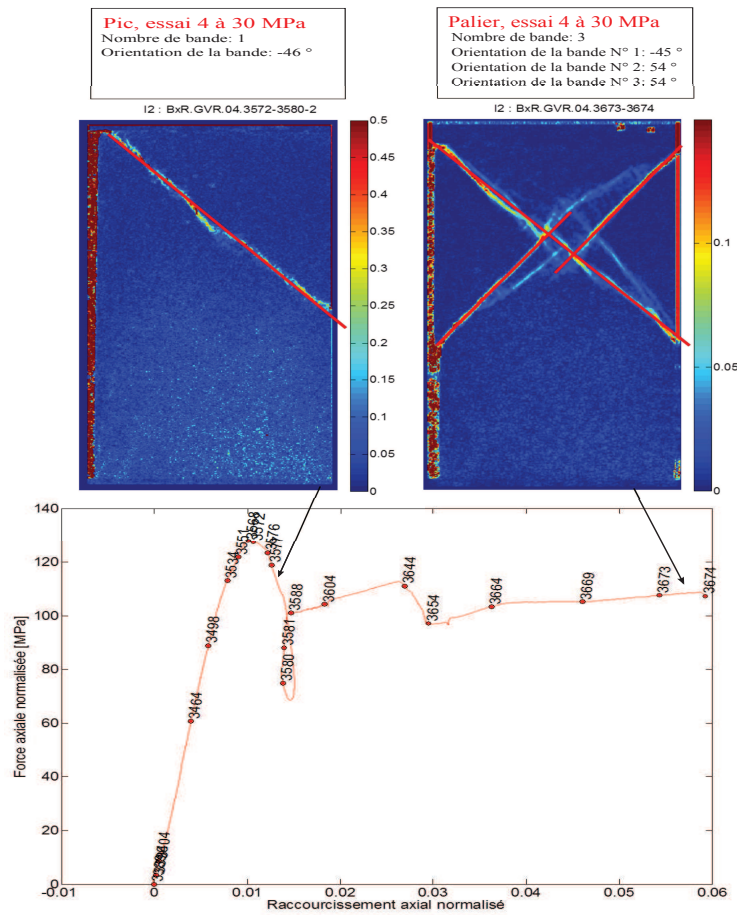


FIGURE 2.18 – Bandes de cisaillement pour l’essai 4 avec un confinement de 30 MPa

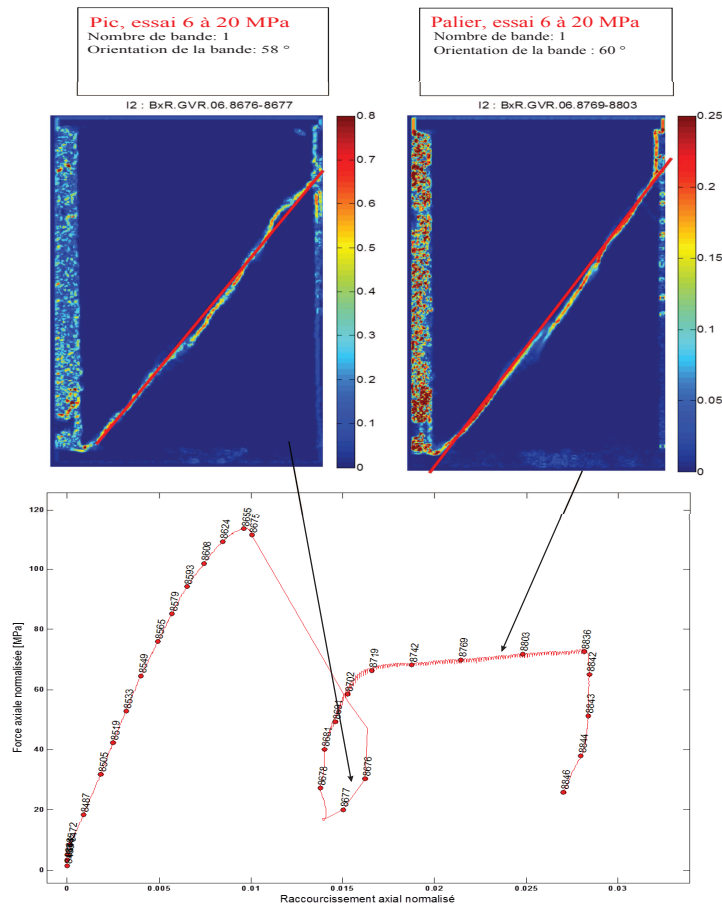


FIGURE 2.19 – Bandes de cisaillement pour l’essai 6 avec un confinement de 20 MPa

## 2.6 Conclusion

Nous avons présenté d’une manière générale à travers ce chapitre tous les éléments essentiels pour commencer une procédure d’identification. Rappelons qu’il est nécessaire d’utiliser des méthodes de régularisation afin de modéliser objectivement la localisation de la déformation dans les géomatériaux. Nous avons présenté dans ce chapitre uniquement les méthodes de régularisation par approches continues avec un focus sur les méthodes de second gradient local. En effet, c’est cette méthode qui sera utilisée dans le cadre de la thèse. Le principal avantage de cette méthode consiste au fait qu’il est possible d’utiliser n’importe quelle loi premier gradient (loi de comportement classique) sans apporter de modification à la loi second gradient. Pour la loi premier gradient, nous avons choisi la loi Plazol qui est adaptée pour le grès pour des pressions de confinements qui restent inférieures à 40 MPa.

Nous avons montré qu’il existe plusieurs méthodes d’identification et donc plusieurs

méthodes d'analyse inverse, le choix de ces méthodes repose essentiellement sur la nature des données expérimentales et le lien qui existe entre les paramètres de la loi de comportement utilisée. Aucune méthode inverse itérative n'a été utilisée dans le cadre de cette thèse, cependant nous avons utilisé pour l'optimisation des résultats numériques une méthode de gradient en calculant le gradient avec la méthode des différences finies. Une fois que nous avons déterminé la méthode de régularisation ainsi que la méthode d'optimisation, il ne reste plus qu'à définir les données expérimentales essentielles pour procéder à l'identification. Nous nous sommes donc fixé quelques observables parmi tous ceux qu'on peut obtenir des essais expérimentaux. Ces observables sont :

- contrainte au pic
- déformation au pic
- valeur du palier de contrainte dans le régime résiduel
- déformation volumique
- largeur de bande
- orientation de bande

## CHAPITRE 3

---

### Essais homogènes

---

L'identification des paramètres de la loi de comportement enrichie, que nous utilisons est décomposée essentiellement en deux parties, pour la raison suivante. En régime homogène, on peut comparer la réponse constitutive avec les résultats expérimentaux. Alors qu'une fois que l'homogénéité est perdue, généralement du fait de la localisation de la déformation, la réponse de l'échantillon devient structurelle, avec des effets de dépendance : taille de l'échantillon, nombre de bandes dans l'échantillon. Cette partie de l'essai ne peut être comparée qu'avec une modélisation numérique du problème hétérogène où la localisation est décrite explicitement. C'est du moins le choix qui est fait dans ce travail de thèse.

La première partie de l'identification, qui est une approche classique, consiste en l'identification de certains des paramètres dans le régime de déformation homogène. Nous avons sélectionné les paramètres qui jouent un rôle principalement dans la partie homogène de l'essai. Nous avons réalisé une étude de sensibilité afin d'étudier l'influence des paramètres de la loi premier gradient sur la partie homogène de la réponse mécanique. Nous présenterons dans un premier temps les résultats des calculs numériques en condition de compression triaxiale axisymétrique. Cela nous a permis d'étudier la loi Plasol et de faire de comparaisons avec les essais expérimentaux effectués sur le grès de Vosges par Pierre Bésuelle durant sa thèse [14]. Une première identification a pu être faite sur les paramètres de la loi. Puis cette étude a été étendue à chargement de type compression en déformation plane (essai biaxial) puisque, la deuxième partie de l'identification est effectuée à partir des résultats expérimentaux issus d'essais biaxiaux. Ces

calculs ont permis d'améliorer les paramètres initialement calculés à partir des essais triaxiaux.

### 3.1 Essais triaxiaux

La modélisation de l'essai triaxial en régime homogène a été réalisée avec un seul élément fini et l'hypothèse d'axisymétrie disponible dans le code Lagamine. Nous avons choisi un jeu de paramètres qui permet d'approcher de façon générale les courbes représentant la réponse mécanique de l'échantillon. Ces courbes consistent, d'une part, en la variation de la contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé<sup>1</sup>, puis d'autre part, en la variation de la déformation volumique de l'échantillon en fonction du raccourcissement axial normalisé, figure 3.1. Nous effectuons 3 calculs qui diffèrent uniquement par le niveau de contrainte isotrope initiale imposé, qui est respectivement de 20 MPa, 30 MPa et 40 MPa pour les calculs 1, 2 et 3. Le même jeu de paramètres constitutifs a donc été utilisé pour les trois calculs.

Les résultats des essais expérimentaux menés par Pierre Bèsuelle nous ont permis de déduire à partir des cercles de Mohr des valeurs approximatives du frottement final et initial ainsi que celles de la cohésion initiale et finale, ceci en traçant les cercles correspondants au pic et palier de contrainte. Puis, à l'aide de la relation que nous expliquerons dans ce qui suit, nous avons estimé les valeurs du coefficient de Poisson  $\nu$  et de l'angle de dilatance  $\Psi$ . Ces paramètres ont été ensuite utilisés dans les calculs en condition triaxiale axisymétrique.

---

1. Le raccourcissement axial normalisé est défini comme la variation de hauteur de l'échantillon, divisée par la hauteur initiale de l'échantillon. Il a la dimension d'une déformation

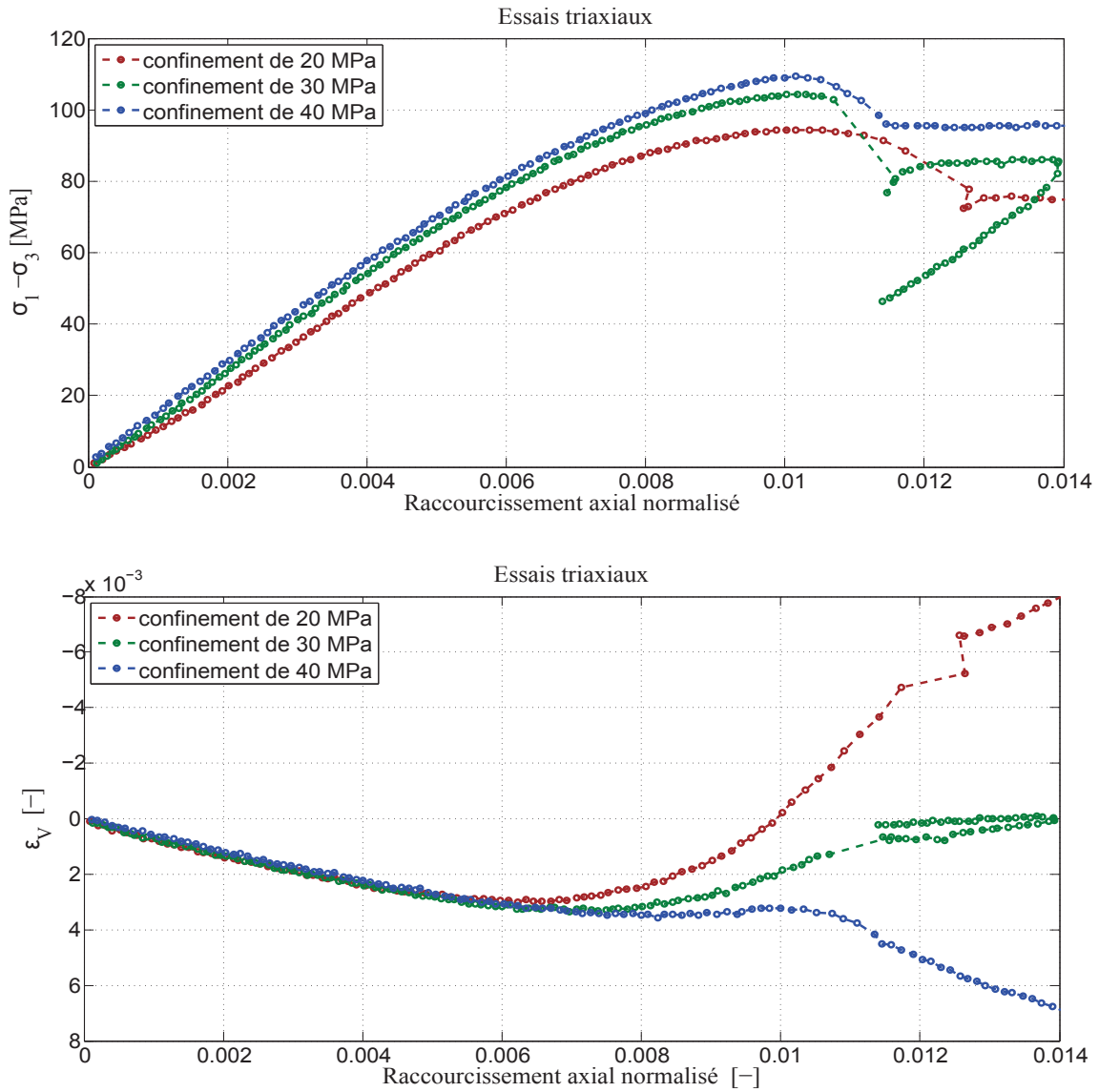


FIGURE 3.1 – Réponse mécanique globale du grès des Vosges en compression axisymétrique pour plusieurs confinements (20, 30 et 40 MPa)

Le module d'Young  $E$  est déduit à partir de la partie initiale quasi-linéaire de la courbe de chargement. Ce module a été par la suite ajusté en utilisant les résultats de simulations de compression en déformation plane. Nous faisons une estimation du coefficient de Poisson  $\nu$  ainsi que l'angle de la dilatance  $\Psi$  à partir de la courbe de déformation volumique. Dans l'équation (3.1),  $\alpha$  représente la pente de la courbe de déformation volumique dans la zone post-pic, voir tableau 3.1.

$$\begin{cases} E = \frac{\Delta|\sigma_y - \sigma_x|}{\Delta\varepsilon_y} \\ \nu = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_y} \right) \\ \tan \alpha = \frac{2 \sin \Psi}{1 - \sin \Psi} \end{cases} \quad (3.1)$$



### 3.1.1 Modélisation et résultats de l'essai triaxial

La figure 3.2 montre les conditions aux limites imposées. Les déplacements verticaux sont bloqués au niveau des nœuds à la base du cylindre, un déplacement vertical est imposé en tête d'échantillon de 1 mm, et comme mentionné ci-dessus nous utiliserons trois confinements 20, 30 et 40 MPa. Ces conditions reproduisent celles imposées expérimentalement. L'élément utilisé dans cette étude est l'élément quadrilatère PXLS, qui est défini par 8 nœuds et 4 points de Gauss.

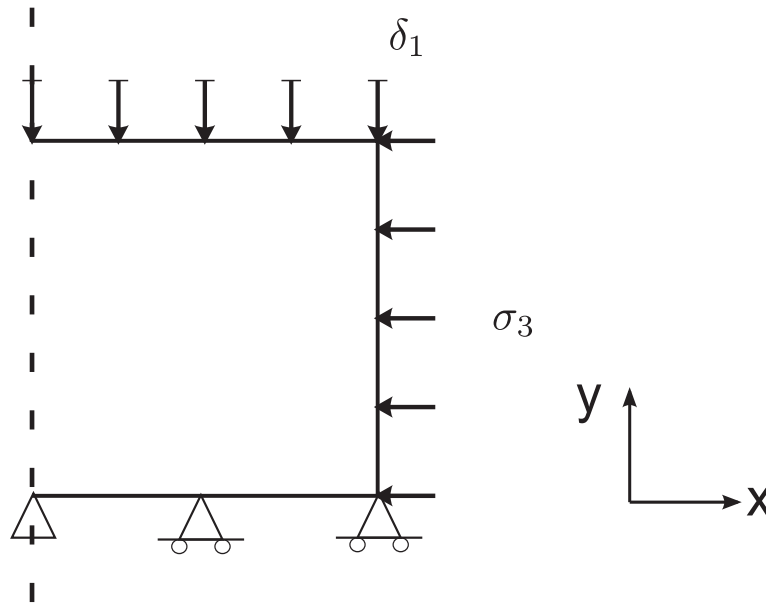


FIGURE 3.2 – Conditions aux limites pour l'essai triaxial axisymétrique

$u_2$	P	E	$\nu$	$c_i$	$c_f$	$\varphi_i$	$\varphi_f$	$\beta_c$	$\beta_\varphi$	$\Psi$
5 mm	20-30-40 MPa	12.7 GPa	0.215	35 MPa	27 MPa	2°	17°	0.005	0.0012	24°

TABLE 3.1 – Paramètres utilisés pour le modèle triaxial axisymétrique

Rappelons ici que l'objectif de ces calculs est uniquement de tester la loi premier gradient et de savoir s'il est possible de reproduire le comportement global du grès des Vosges en utilisant cette loi. La figure 3.3 montre qu'il est justifié d'utiliser la loi Plasol, pour modéliser le comportement du grès. Nous remarquons en effet à travers les courbes de chargement que les courbes expérimentales et numériques se rapprochent assez bien, même si l'on constate des différences au niveau du pic et du palier. Nous pensons que celles-ci sont dues à un choix de paramètres qui n'est pas le plus approprié. Rappelons que l'objectif de ce paragraphe n'étant pas d'approcher les résultats expérimentaux

mais uniquement de tester la loi de comportement, en utilisant pour les calculs les paramètres déduits des essais triaxiaux.

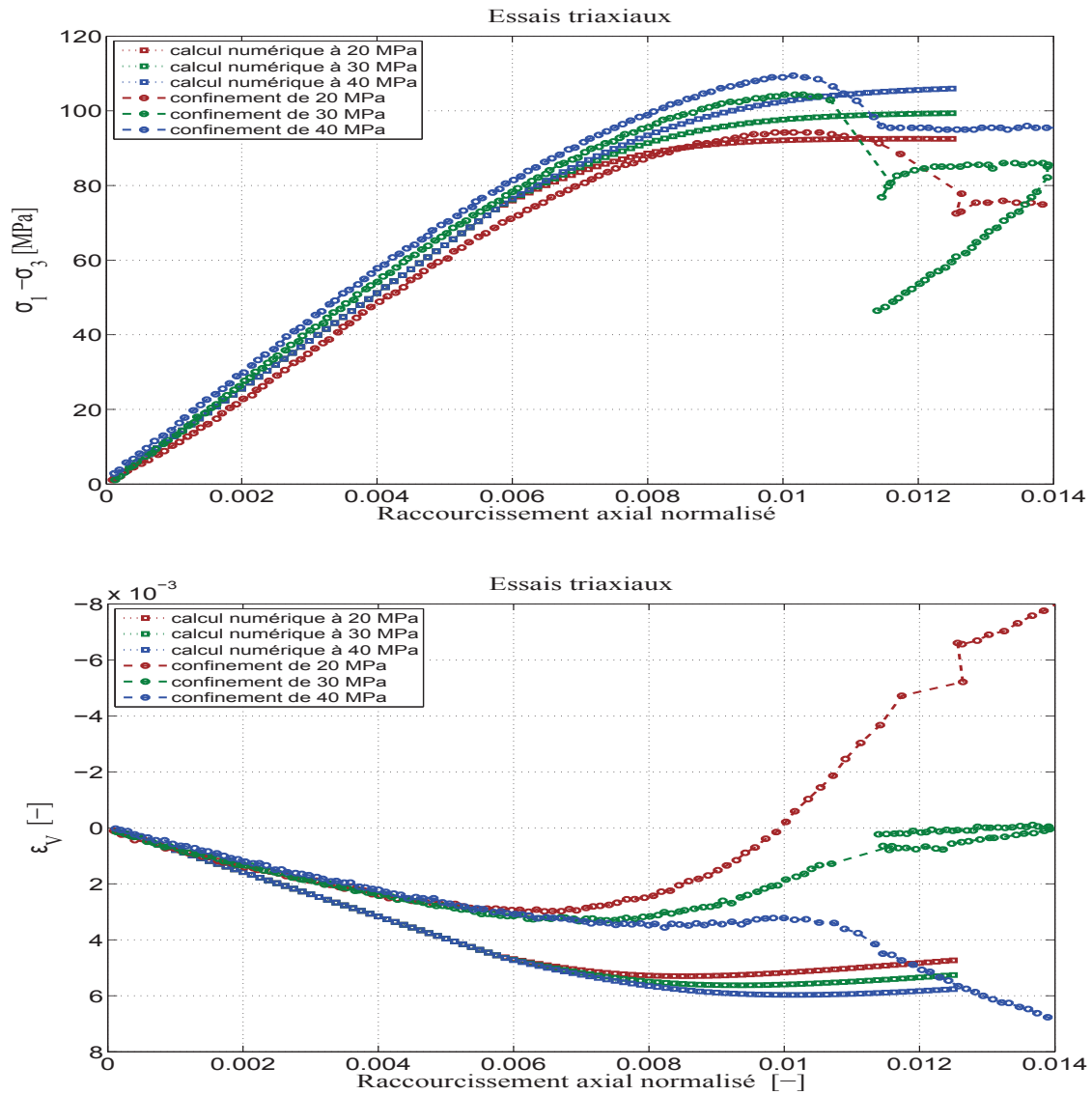


FIGURE 3.3 – Comparaison des résultats expérimentaux et des résultats donnés par le modèle pour le jeu de paramètres du tableau 3.1. Courbe de contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé

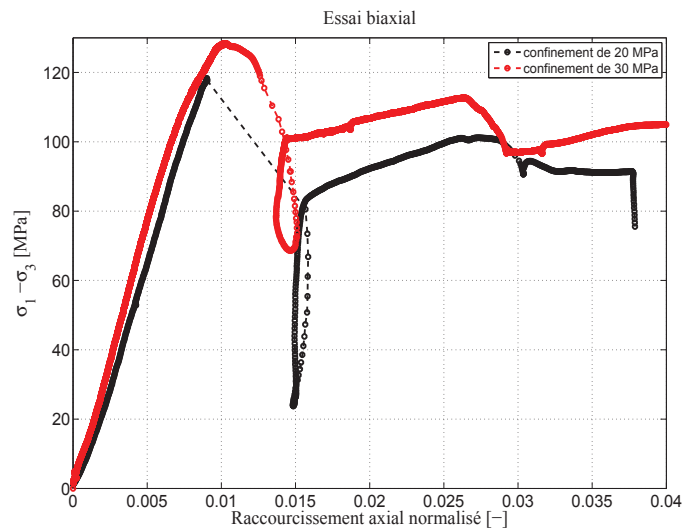
## 3.2 Essais biaxiaux

Une campagne d'essais a été menée sur le grès de Vosges dans le laboratoire 3SR par Pierre Bésuelle et Patrizia Lanatà [58]. Les essais ont été conduits dans l'appareil

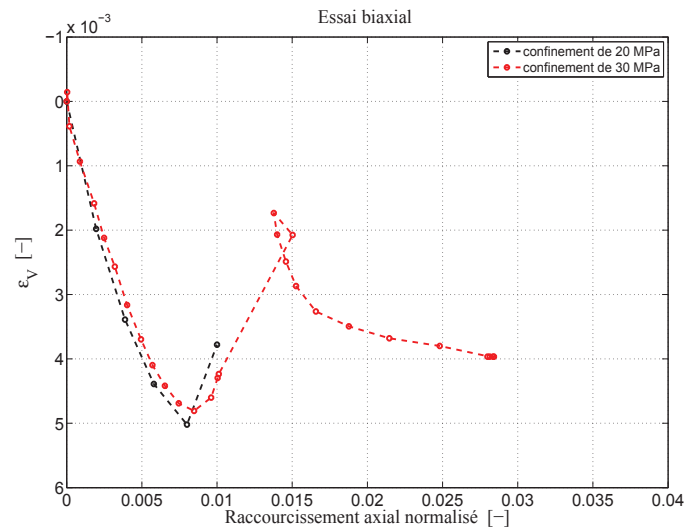
triaxial vrai en conditions de compression en déformation plane (essai biaxial). Il permet de visualiser l'échantillon en cours de chargement, afin de mesurer le champ de déformation (à l'aide d'une méthode de corrélation d'images) [17], à tout instant de l'essai. Pour chaque essai, il est observé un régime initial de déformation homogène, puis un régime localisé, nous nous intéressons ici uniquement à la partie homogène de l'essai.

### 3.2.1 Données expérimentales

Nous avons utilisé pour cette partie deux essais à 20 et 30 MPa de confinement, nous disposons à la fois de la courbe de déformation volumique ainsi que de la courbe de chargement figures 3.4 et 3.5.



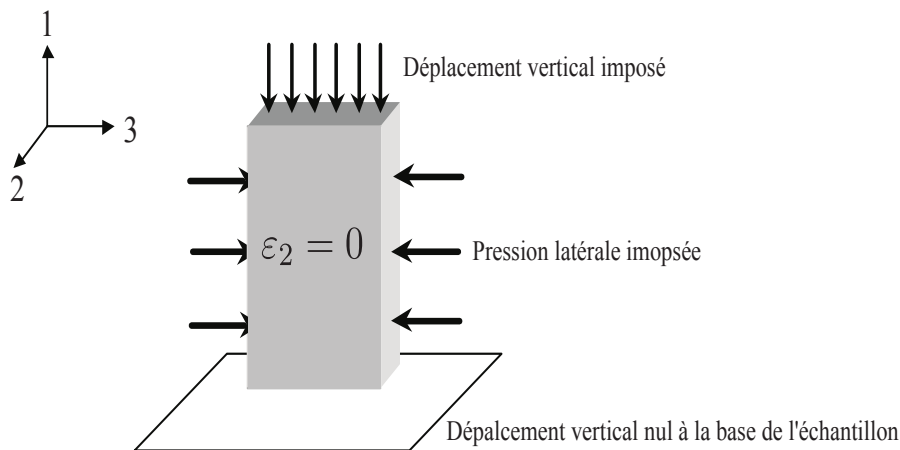
**FIGURE 3.4** – Courbes de chargement pour deux essais biaxiaux avec un confinement de 20 et 30 MPa, respectivement



**FIGURE 3.5** – Déformation volumique pour deux essais biaxiaux avec un confinement de 20 et 30 MPa, respectivement

### 3.2.2 Calculs numériques

La première étape d'identification concerne le régime de déformation homogène. Nous effectuons ici une étude de sensibilité sur les paramètres de la loi Plasol afin d'évaluer l'influence de chaque paramètre sur la réponse du modèle, et de pouvoir ainsi optimiser certains paramètres qui jouent un rôle essentiellement en régime homogène.



**FIGURE 3.6** – Conditions aux limites de l'essai biaxial avec une pression de confinement  $p$  et un déplacement  $u_2$  imposé en tête de l'échantillon

Nous modélisons un essai biaxial de compression en déformation plane, à déplacement

axial et contrainte latérale imposée (figure 3.6). Les conditions aux limites ci-dessus reproduisent les conditions appliquées expérimentalement. L'échantillon numérique est de 50 mm de haut et de 25 mm de large.

### 3.2.2.1 Étude de sensibilité du modèle

Afin de procéder à l'étude de sensibilité, nous avons commencé par choisir un jeu de paramètres de référence. Les paramètres utilisés pour les essais biaxiaux ont été légèrement modifiés afin d'améliorer la comparaison avec les essais biaxiaux (tableau 3.2). Nous sommes partis des paramètres des calculs triaxiaux, puis nous les avons ajusté afin qu'ils correspondent mieux aux résultats des essais biaxiaux. La procédure utilisée pour l'étude de sensibilité est la suivante : à partir des paramètres de référence représentés au tableau 3.2. Nous effectuons isolement pour chaque paramètre un ensemble de 5 calculs, dont deux avec des valeurs du paramètre inférieures à la valeur de référence et deux autres avec des valeur supérieures. Nous modifions uniquement le paramètre en question et nous gardons le reste des paramètres inchangés, ainsi nous observons directement l'influence de la modification du paramètre sur la réponse mécanique.

$u_2$	P	E	$\nu$	$c_i$	$c_f$	$\varphi_i$	$\varphi_f$	$\beta_c$	$\beta_\varphi$	$\Psi$
1 mm	20-30 MPa	12.2 GPa	0.215	32.5 MPa	12 MPa	4°	21°	0.005	0.001	24°

**TABLE 3.2** – Paramètres de référence de l'étude de sensibilité représentés par la en courbe bleu sur les figures

#### • Étude de sensibilité pour un confinement de 20 MPa

Nous avons choisis d'effectuer notre étude de sensibilité sur 5 des paramètres de la loi Plasol, nous avons exclu de cette étude le coefficient de Poisson ainsi que le module d'Young, car ils ont été déduits dès le début à partir des triaxiaux axysymétriques. La cohésion initiale et le frottement initial ont été modifiés afin de mieux approcher les résultats expérimentaux, mais sont restés proches des valeurs initialement utilisés. L'étude de sensibilité concerne donc les paramètres suivants : frottement final  $\varphi_f$ , cohésion finale  $c_f$ , les coefficients  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$  et l'angle de dilatance  $\Psi$ . Pour tous ces calculs, le confinement est imposé à 20 MPa, puis à 30 MPa.

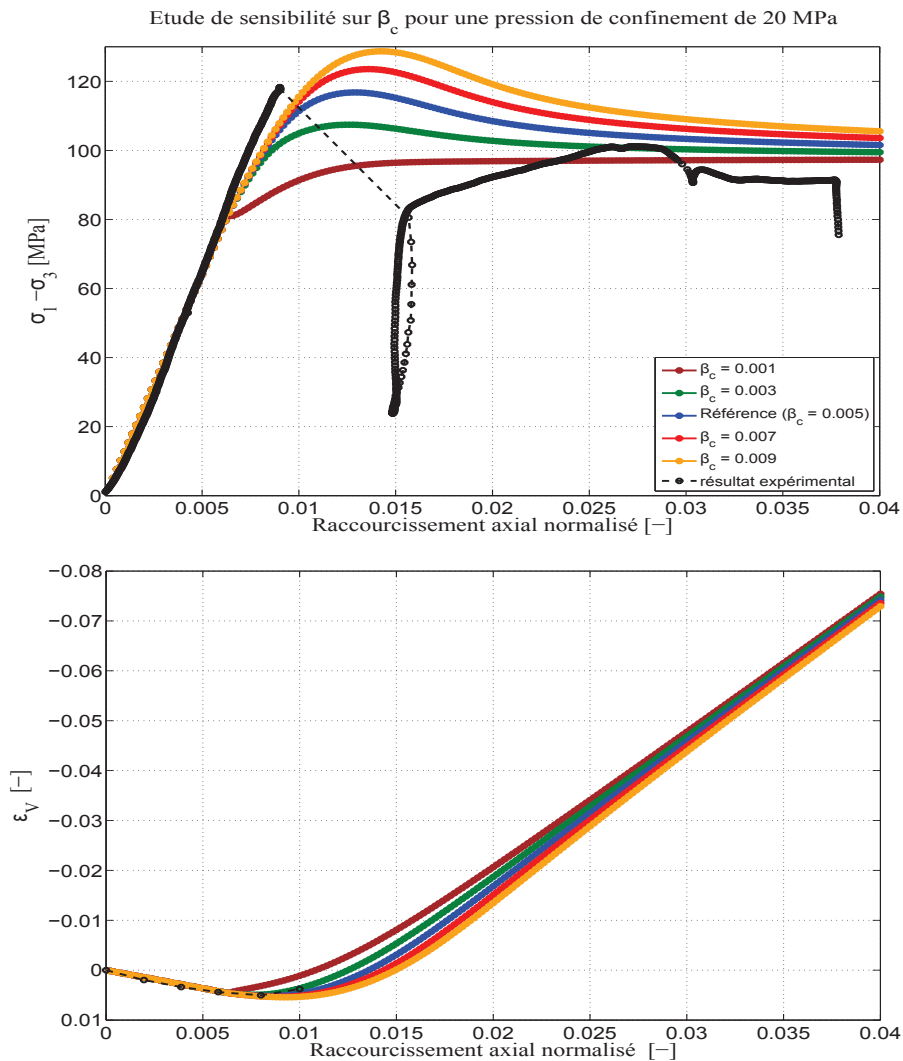
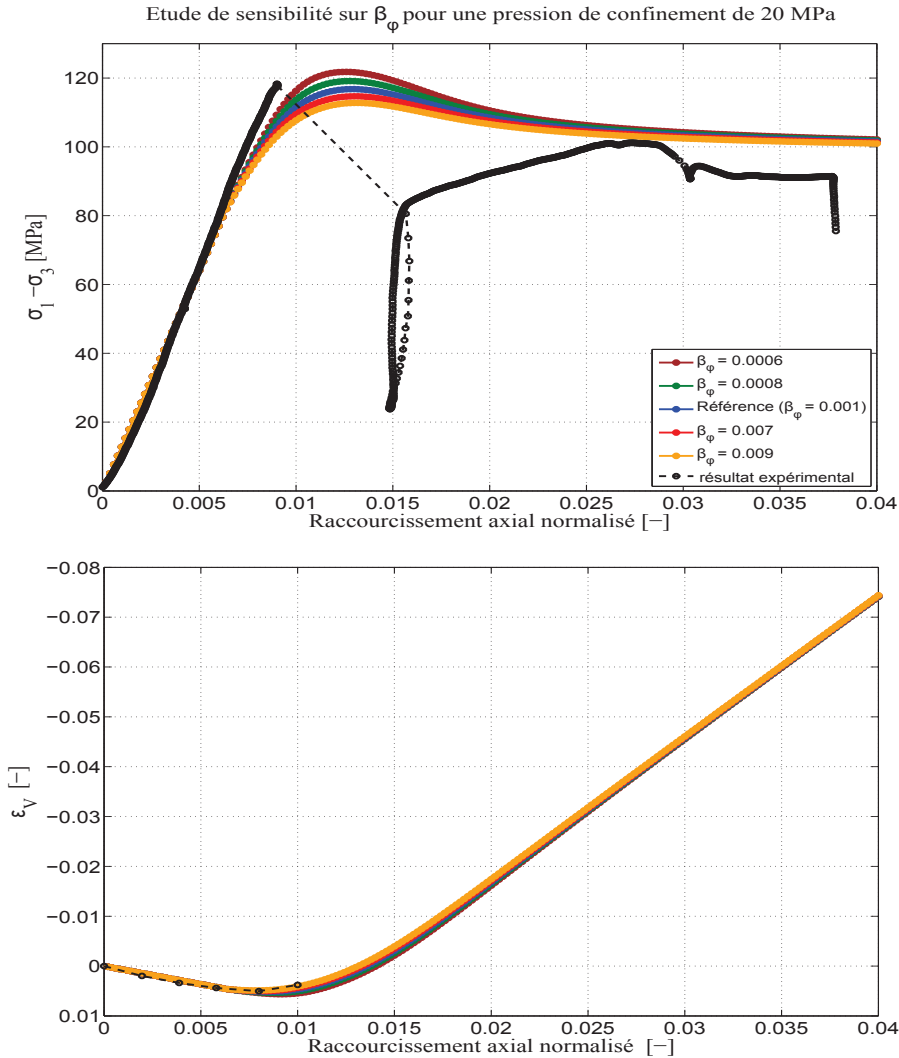


FIGURE 3.7 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $\beta_c$

La figure 3.7 représente les résultats de l'étude de sensibilité du paramètre  $\beta_c$ . A partir de la valeur de référence, le paramètre  $\beta_c$  est augmenté puis diminué deux fois de la valeur 0.002. Les résultats montrent clairement que l'augmentation de  $\beta_c$  fait augmenter le pic de la courbe de chargement, en effet quand  $\beta_c$  passe de 0.001 à 0.009 la valeur du pic varie de 30 MPa. Notons que si la valeur de  $\beta_c$  diminue de façon significative, nous n'observons plus de pic dans la courbe de contrainte (figure 3.7, courbe marron). En effet la diminution de ce paramètre conduit à un adoucissement précoce, et rappelons que nous avons pour cette loi ce que l'on peut qualifier de "compétition" entre le durcissement sur  $\varphi_f$  et l'adoucissement sur  $c$ , et pour ce cas précis c'est le durcissement qui est prédominant. L'augmentation de  $\beta_c$ , retarde le régime dilatant sur la courbe de variation de volume même si à terme les courbes convergent. Ce paramètre est très important puisqu'il nous permet de modifier la valeur du pic de contrainte ainsi que

la déformation au pic, sans modification du palier. Il joue sur la pente de la courbe de contrainte après pic, ce qui est un ingrédient important dans la modélisation du régime localisé.



**FIGURE 3.8** – Étude de sensibilité sur le paramètre  $\beta_\varphi$  pour un confinement de 20 MPa

Concernant l'étude de sensibilité du paramètre  $\beta_\varphi$  la figure 3.8 montre clairement que l'augmentation de  $\beta_\varphi$  fait diminuer le pic tout en gardant le palier constant, la variation du pic reste légère puisque la variation de  $\beta_\varphi$  de 0.006 à 0.09 fait diminuer le pic de seulement 9 MPa. La forme globale de la courbe de référence n'est pas modifiée par ces variations, en particulier la déformation au pic. La courbe de déformation volumique n'est pratiquement pas influencée par les modifications de  $\beta_\varphi$ . Ce paramètre a un rôle intéressant dans une optique d'analyse inverse puisqu'il permet de modifier le pic de la courbe de chargement tout en gardant la courbe de déformation volumique quasi

identique.

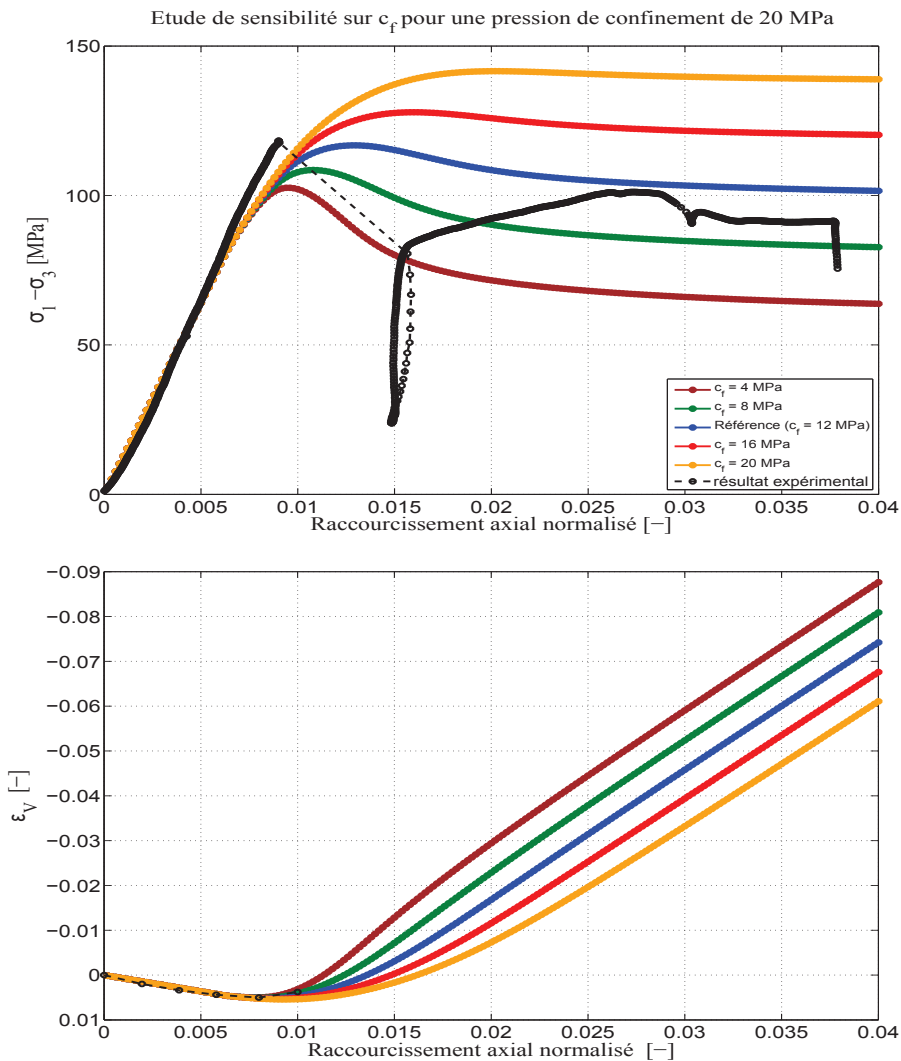


FIGURE 3.9 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $c_f$ , pour un confinement de 20 MPa

Le palier et le pic de contraintes sont sensibles à : la cohésion finale et au frottement final. Ceux-ci doivent être maniés avec précaution. Si la cohésion finale est trop augmenté, le comportement devient purement durcissant et ne présente plus d'adoucissement. Ceci s'explique simplement par le fait que l'augmentation de la cohésion finale rapproche sa valeur de la cohésion initiale. Nous savons que si  $c_f = c_i$ , il n'y a plus de variation de la cohésion et donc plus d'adoucissement, figure 3.9. Plus la valeur du frottement final est importante plus de durcissement est important. Si nous augmentons de manière significative le frottement final, nous n'observons plus d'adoucissement sur la réponse mécanique. Dans ce cas le durcissement prend le dessus sur l'adoucissement (figure 3.10). La déformation volumique globale est elle aussi très sensible à  $\varphi_f$  et  $c_f$ ,



les courbes divergent très rapidement après l'entrée en plasticité : le début de la phase de dilatance est fortement retardée avec l'augmentation des deux paramètres.

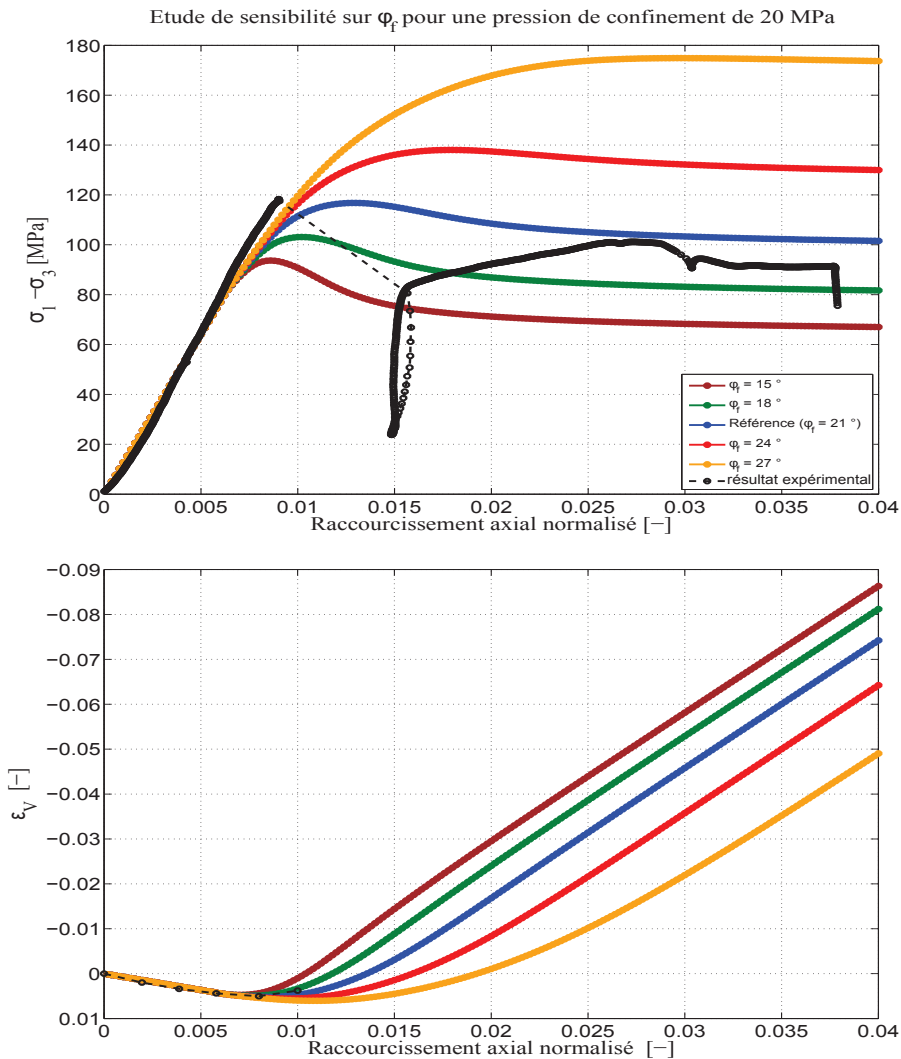
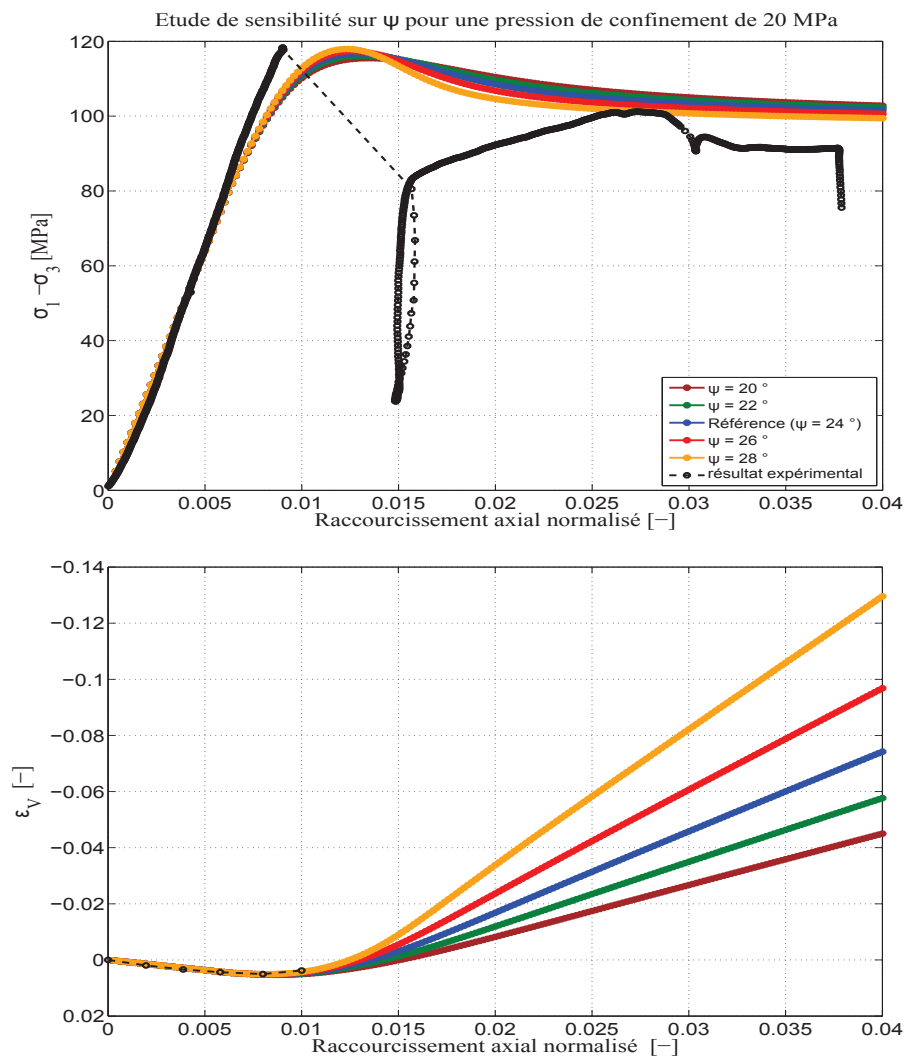


FIGURE 3.10 – Pour ces 5 calculs,  $\varphi_f$  est le seul paramètre qui a été modifié

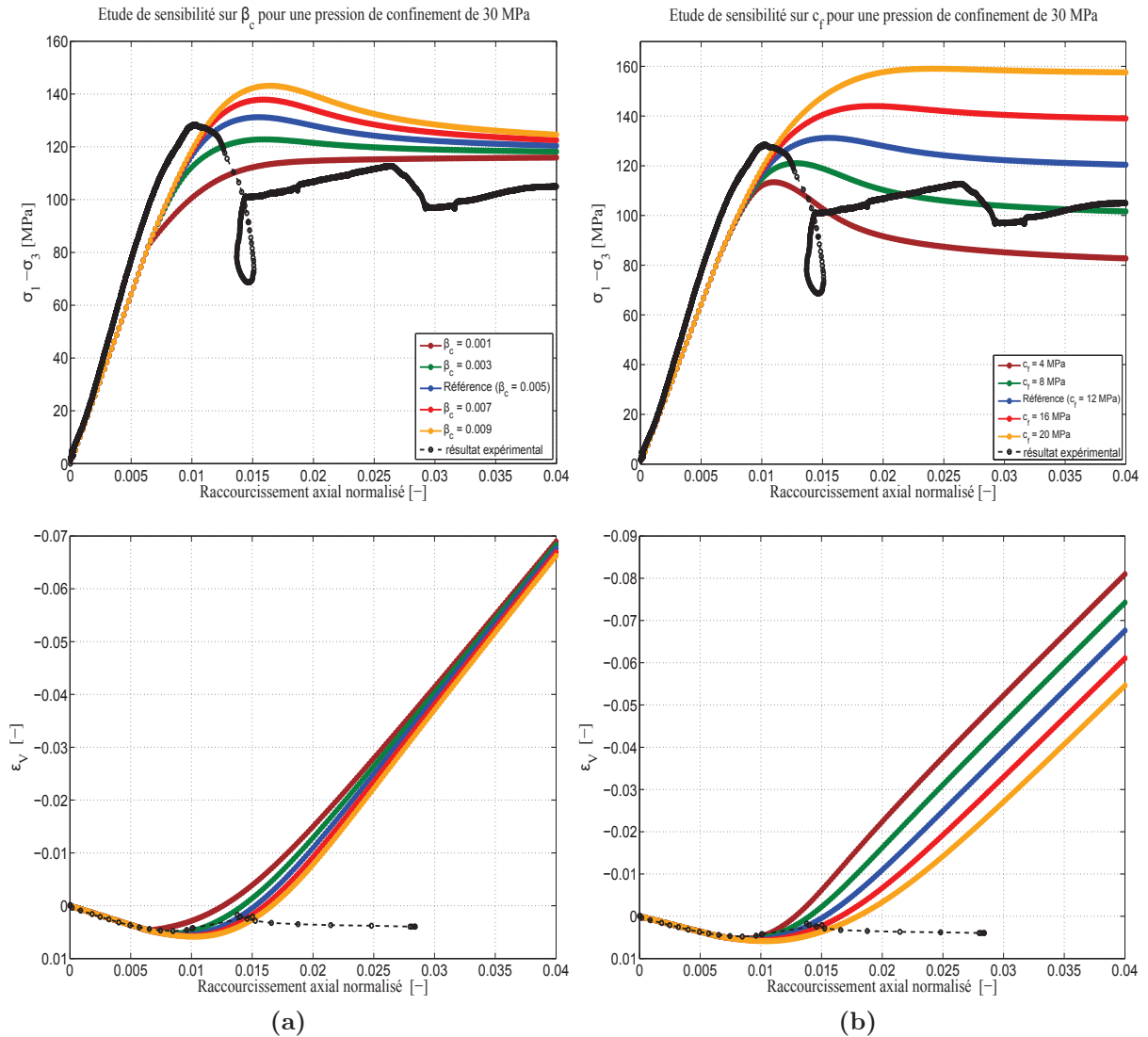
Sur la figure 3.11 nous montrons l'effet de la variation de la dilatance sur la réponse mécanique. Notons que le pic croît très faiblement avec la dilatance, puisque l'augmentation de la dilatance de  $8^\circ$  induit une variation du pic de seulement 3 MPa. Les courbes de déformation volumique se superposent assez bien jusqu'au pic puis elles divergent ensuite. Cette divergence s'accroît au fur et à mesure que le raccourcissement augmente, puisque c'est la pente de la dilatance qui est affectée. Le paramètre  $\Psi$  influence beaucoup la déformation volumique. Il permet de garder le même palier tout en modifiant la déformation volumique globale. Il permet également de modifier la pente de la courbe de contrainte après le pic.



**FIGURE 3.11** – Étude de sensibilité sur l'angle de dilatance  $\Psi$ , pour un confinement de 30 MPa

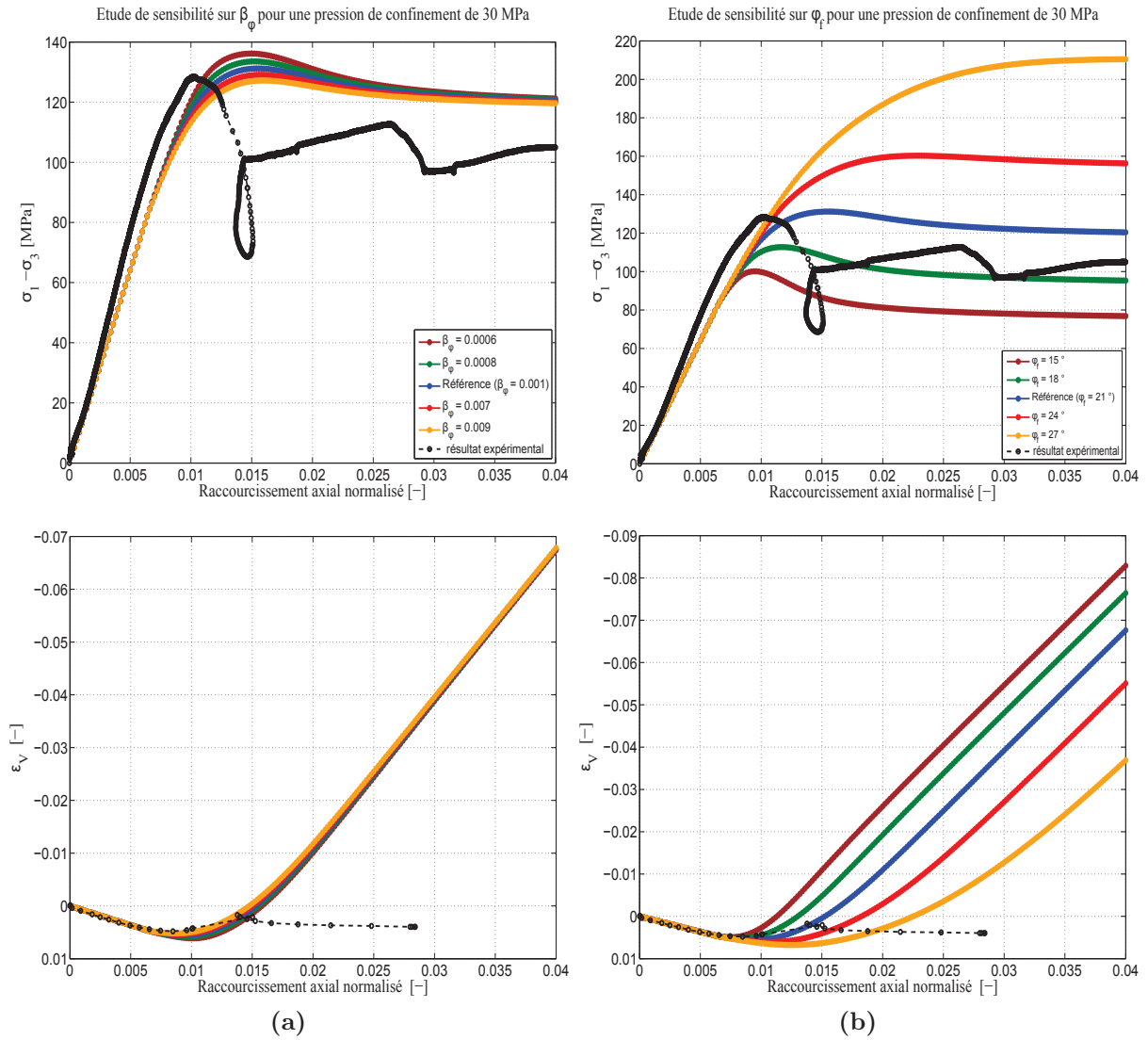
### • Étude de sensibilité pour un confinement de 30 MPa

Puisque nous travaillons avec deux confinements, il est essentiel de refaire l'étude de sensibilité pour un confinement à 30 MPa, afin de savoir si la modification du niveau de confinement modifie de façon significative les résultats de l'étude de sensibilité que nous avons effectué avec un confinement de 20 MPa. Nous avons donc réalisé les mêmes calculs que ceux présentés précédemment mais avec cette fois une pression de confinement de 30MPa.



**FIGURE 3.12** – Étude de sensibilité avec un confinement de 30MPa sur les paramètres  $\beta_c$  et  $c_f$

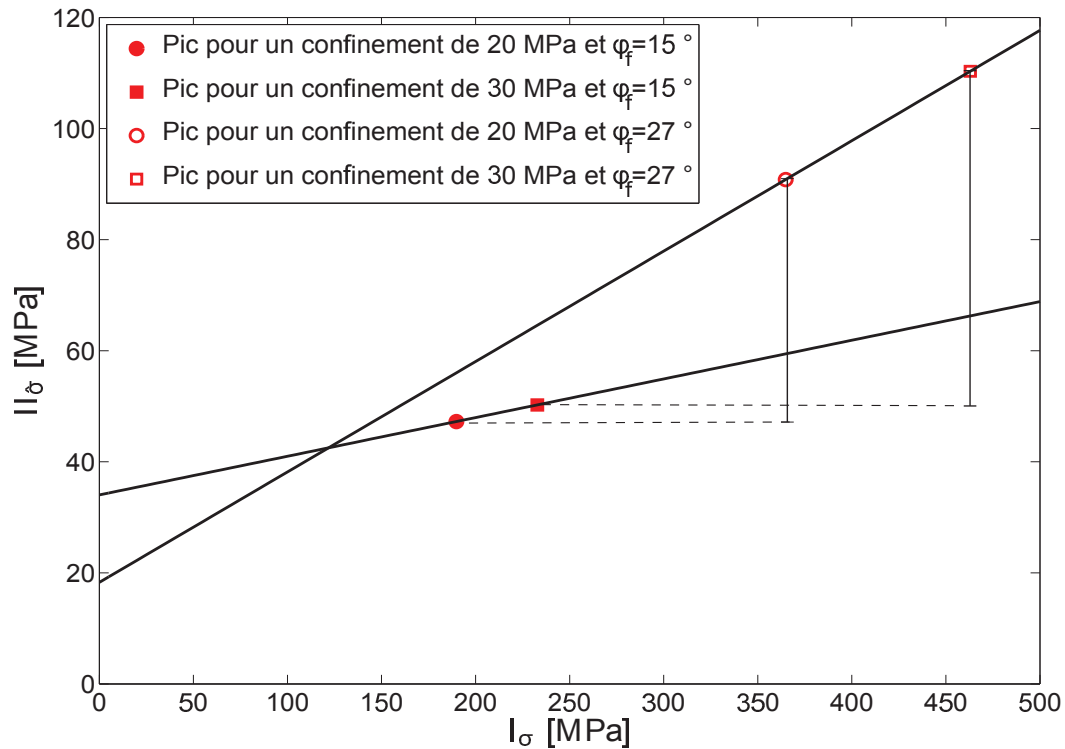
La figure 3.12 montre la sensibilité de la réponse mécanique par rapport aux modifications de la cohésion finale et du coefficient  $\beta_c$  pour un calcul avec un confinement de 30 MPa. Ces résultats montrent clairement que les tendances sont les mêmes quant aux résultats de l'étude de sensibilité pour ces deux paramètres. Nous remarquons en effet que si l'on augmente beaucoup la cohésion finale on n'observe plus d'adoucissement pour les mêmes raisons que nous avons expliqué auparavant. D'autre part la variation de  $\beta_c$  de 0.001 à 0.009 fait varier le pic d'environ 30 MPa comme pour les calculs avec un confinement de 20 MPa.



**FIGURE 3.13** – Étude de sensibilité avec un confinement de 30MPa sur les paramètres  $\beta_\varphi$  et  $\varphi_f$

Les paramètres qui sont liés au frottement et qui sont  $\beta_\varphi$  et  $\varphi_f$  sont ceux pour lesquels nous notons des variations sur les résultats de l'étude de sensibilité entre un confinement à 20 MPa et celui à 30 MPa. En effet, on remarque par exemple sur la figure 3.13 que la variation du frottement final de 14 degrés fait varier le pic d'environ 110 MPa, alors que pour un calcul avec un confinement de 20 MPa et en utilisant les mêmes variations du frottement (figure 3.10), le pic varie de seulement 82 MPa. Pour illustrer cette différence nous avons tracé les valeurs des pics pour les deux confinements dans le plan  $I_\sigma - II_{\hat{\sigma}}$  (figure 3.14). Sur cette figure, la pente de la droite dépend directement du frottement apparent. Nous remarquons en effet que la pente de la droite augmente

avec la valeur de  $\varphi_f$ . Ainsi l'écart entre les valeurs aux pics aux confinements 20 et 30 MPa sera d'autant plus important que le frottement est important.



**FIGURE 3.14** – Étude de l'influence du paramètre  $\varphi_f$  sur le pic de contrainte aux confinements de 20 et 30 MPa, dans le plan  $I_{\sigma} - II_{\delta}$

Les résultats de l'étude de sensibilité sur  $\Psi$  avec une pression de confinement de 30 MPa ne montre pas de différence par rapport aux résultats déjà obtenus avec un confinement de 20 MPa. Le paramètre  $\Psi$  reste un paramètre potentiel pour modifier la déformation volumique pour les deux confinements.

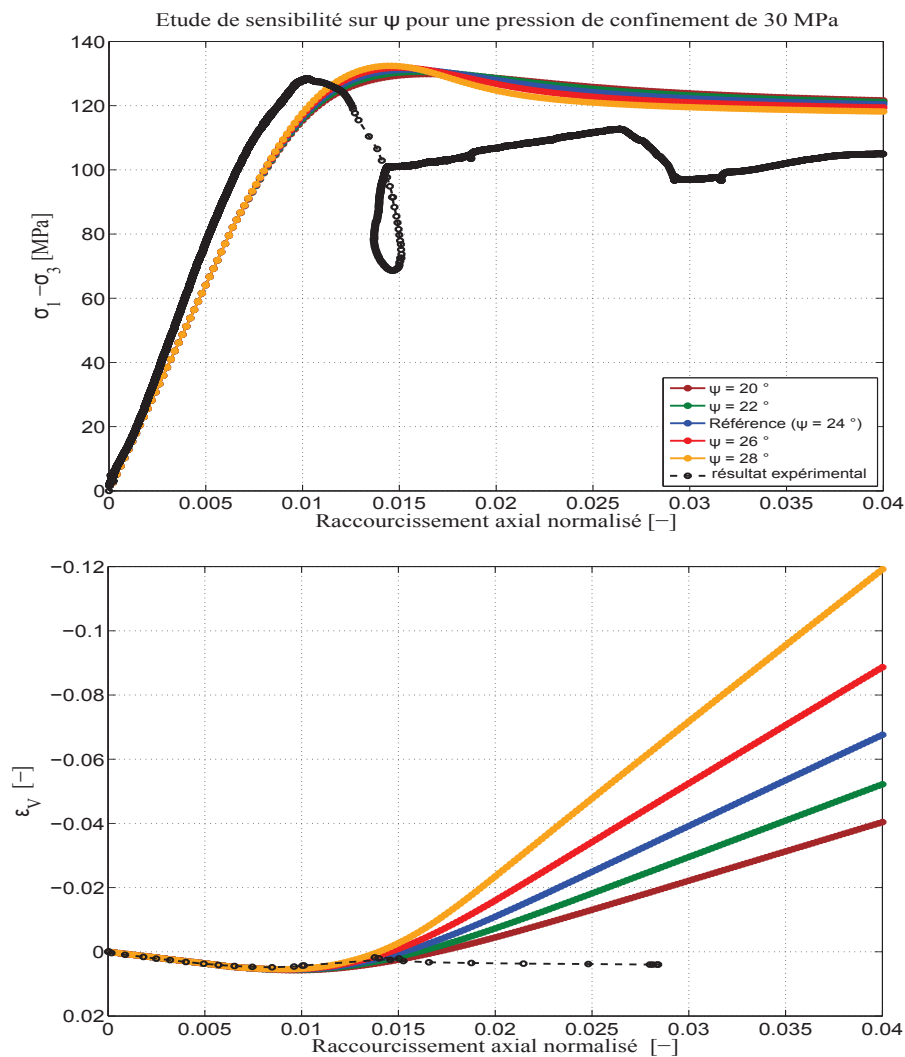


FIGURE 3.15 – Étude sensibilité du paramètre  $\Psi$ , pour un confinement de 30 MPa

### 3.3 Étude de bifurcation

Le phénomène de la localisation de la déformation peut être vu au niveau théorique comme un phénomène de bifurcation. Le terme bifurcation désigne de façon générale, le fait que le chemin fondamental d'un système change brusquement lors de son évolution. A partir d'un état d'équilibre donné, supposons qu'on donne une petite perturbation à l'entrée du système. Si la réponse (sortie) correspondante reste petite, le système évolue de façon stable. Mais il arrive que dans certaines conditions, la réponse correspondante soit très grande. Le système bascule alors brusquement sur un chemin d'évolution non encore expérimenté. Un des exemples simples de bifurcation en mécanique est le

flambement eulérien (figure 3.16). Une tige comprimée par une force  $F$  ne change pas de configuration tant que sa valeur reste inférieure à  $F_c$ . C'est le cas de stabilité. Dès que  $F$  dépasse  $F_c$ , la tige peut flamber brusquement. Ce changement de configuration géométrique (bifurcation) est une instabilité. La force  $F_c$  est appelée force critique d'EULER.

Dans la théorie de la bifurcation, la localisation de la déformation est vue comme une perte d'unicité de la solution du problème aux limites, l'apparition de la localisation est caractérisée par différents modes de bifurcation, comme le mode de striction de Hill & Hutchinson [50], le mode d'ondes de surface de Triantafyllidis [96], ou le mode de cisaillement de Rice [84]. Dans notre étude, nous nous limiterons aux problèmes de localisation en bandes de cisaillement ; nous ne discuterons donc que le troisième mode de bifurcation cité ci-dessus, le mode Rice.

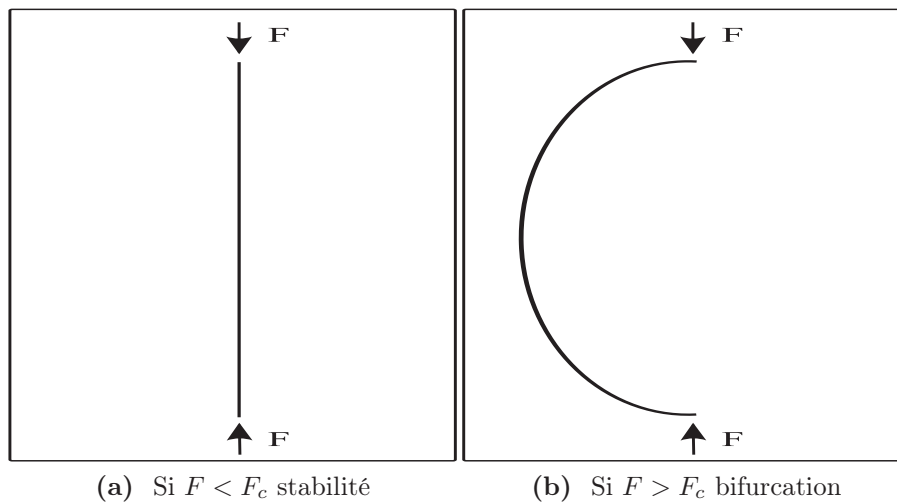


FIGURE 3.16 – Exemple de bifurcation en mécanique

### 3.3.1 Critère de bifurcation de Rice

Nous allons ici expliquer dans un premier temps ce qu'est le critère de Rice [84] puis nous appliquerons ce critère à la loi élasto-plastique Plasol [4], nous présenterons ensuite les différents résultats que l'on peut obtenir à partir de ce critère.

Le développement effectué par Rice [84] suppose que le milieu étudié est infini et homogène et que le problème se limite aux solides non visqueux. Ces hypothèses permettent d'étudier la localisation de la déformation comme un problème de bifurcation et l'existence d'une solution homogène au problème est supposée. Ayant ainsi défini le cadre de l'étude, l'objectif de Rice [84] est de rechercher si une déformation suivant un mode

localisé peut constituer une autre solution que le mode homogène. Nous reprenons ici les développements déjà effectués dans [18]. Nous considérons que la compression est définie pour des contraintes négatives et nous utilisons la notation d'Einstein.

### 3.3.1.1 Cas général

On considère une classe de matériaux pour laquelle l'incrément de contrainte peut s'exprimer en fonction de l'incrément de déformation de la façon suivante avec  $\dot{\sigma}$  la dérivée temporelle de  $\sigma$  :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mathfrak{L}_{ij}(D_{kl}) \quad (3.2)$$

Où  $D_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$  est la vitesse de déformation,  $x_i$  est la coordonnée spatiale et  $\mathfrak{L}$  est une fonction de  $D$  qui dépend de l'état du matériau (contraintes, histoire de déformations, etc.) Afin d'avoir une contrainte objective nous considérons les dérivées de Jaumann, défini par (3.3) où  $l_{ij}$  est la vitesse de rotation :

$$\overset{\nabla}{\dot{\Sigma}}_{ij} = \dot{\Sigma}_{ij} - \Sigma_{il}l_{jl} + \Sigma_{ik}l_{kj} - \Sigma_{lj}l_{il} + \Sigma_{kj}l_{ki} \quad (3.3)$$

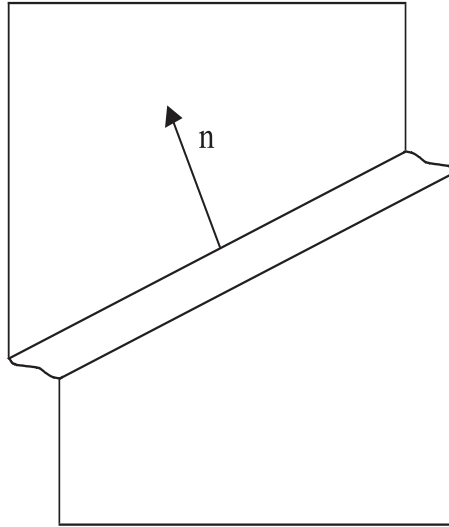


FIGURE 3.17 – Bande de localisation plane et le vecteur normal unitaire  $n$

- Condition cinématique

La solution non homogène est supposée avoir la forme d'une bande plane avec une normale unitaire  $n$ . A l'intérieur de la bande, l'incrément de déformation dépend uniquement de la position transversale à la bande. A l'extérieur de la bande l'incrément



de déformation défini par  $D_{ij}^0$  est supposé rester homogène. L'incrément de déformation à l'intérieur de la bande à la forme suivante :

$$D_{ij}^1 = D_{ij}^0 + \frac{1}{2}(g_i n_j + g_j n_i) \quad (3.4)$$

Où  $g = g(x_i n_i)$  est un vecteur arbitraire, qui dépend en direction et en intensité de la position transversale à la bande

- Condition d'équilibre

Dans chaque point du milieu, le champ de contrainte satisfait la condition quasi-statique d'équilibre :

$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad (3.5)$$

Puisque le champ de contrainte de pré-bifurcation est supposé uniforme ([87]; [84]), l'incrément de contrainte à l'apparition de la localisation satisfait :

$$\dot{\sigma}_{ij,i} = 0 \quad (3.6)$$

Cette condition est satisfaite à l'extérieur de la bande en raison de l'homogénéité du gradient de vitesse, et par conséquent du champ de contrainte. L'incrément de contrainte dans la bande dépend de la position transversale à la bande, équations (3.2) et (3.4). De ce fait l'équation (3.6) est satisfaite à l'intérieur de la bande si les tractions aux interfaces de la bande sont continues :

$$\dot{\sigma}_{ij}^1 n_j = \dot{\sigma}_{ij}^0 n_j \quad (3.7)$$

Où  $\dot{\sigma}^0$  et  $\dot{\sigma}^1$  sont respectivement les incréments de contrainte à l'extérieur et à l'intérieur de la bande .

- Condition de bifurcation

En remplaçant l'expression (3.2) dans l'expression de la condition d'équilibre (3.7) et en utilisant la condition cinématique, la condition de bifurcation s'écrit de la manière suivante

$$\mathfrak{L}_{ij} (D_{kl}^0 + (1/2)(g_k n_l + g_l n_k)) n_j = \mathfrak{L}_{ij} (D_{kl}^0) n_j \quad (3.8)$$

Une solution triviale à cette équation est  $g = 0$ , qui correspond à une déformation homogène et continue. La localisation de la déformation est possible s'il existe un vecteur  $g \neq 0$  et un vecteur unitaire  $n$ , qui satisfait la relation (3.8). Si le vecteur  $g$  est normal à  $n$ , nous avons du cisaillement pur, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de déformation volumique, nous avons un simple mouvement de glissement entre les deux bords de la bande. Dans les cas extrêmes où  $g$  et  $n$  ont la même direction, nous n'avons pas de glissement relatif entre les deux bords mais un mouvement de rapprochement (bande de compaction) ou de l'éloignement (bande de dilatance). La relation (3.8) montre que le critère dépend de la loi de comportement. De ce fait, la prédiction de la localisation

dépend fortement de l'expression mathématique de  $\mathfrak{L}$ . Considérons maintenant le cas pour lequel la loi de comportement en vitesse est supposée être une relation linéaire entre l'incrément de déformation  $D$  et l'incrément de contrainte  $\dot{\sigma}$  :

$$\dot{\sigma} = L_{ijkl}D_{kl} \quad (3.9)$$

Où  $L_{ijkl}$  est un tenseur du quatrième ordre qui peut dépendre de la contrainte, des déformations accumulées, ou de l'histoire des déformations. Si la relation entre  $\dot{\sigma}$  et  $D_{kl}$  est linéaire dans ce cas, la relation de bifurcation s'écrit :

$$L_{ijkl}n_jn_lg_k = 0 \quad (3.10)$$

Une solution non triviale est possible si :

$$\det[L_{ijkl}n_jn_l] = 0 \quad (3.11)$$

L'expression (3.11) peut s'écrire :

$$\det[n.L.n] = 0 \quad (3.12)$$

Le tenseur  $n.L.n$  est appelé tenseur acoustique.

Dans le cas des lois bilinéaires comme c'est le cas pour la loi Plasol, deux hypercônes existent pour ces lois, l'un représente le domaine élastique et le second le domaine élasto-plastique. A l'intérieur du domaine élastique la loi de comportement s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl}^e D_{kl} \quad (3.13)$$

A l'extérieur du domaine élastique cette relation s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl}^{ep} D_{kl} \quad (3.14)$$

La condition de bifurcation s'écrit alors :

$$L_{ijkl}^1 n_j n_l g_k = (L_{ijkl}^0 - L_{ijkl}^1) D_{kl}^0 n_j \quad (3.15)$$

La déformation à l'extérieur de la bande est en générale supposée plastique, la déformation à l'intérieur de la bande est quant à elle soit élastique soit plastique. Si le comportement est plastique à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de la bande, la bifurcation est dite continue [83]. Dans ce cas l'équation (3.15) devient (3.10). La condition de localisation devient donc de la forme (3.11) remplaçant  $L$  par  $L^{ep}$ . Si la décharge élastique survient en dehors de la bande la bifurcation devient discontinue et la relation (3.15) s'écrit :

$$L_{ijkl}^{ep} n_j n_l g_k = (L_{ijkl}^e - L_{ijkl}^{ep}) D_{kl}^0 n_j \quad (3.16)$$

Rice et Rudnicki [83] ont montré que la bifurcation continue est un cas limite de la bifurcation discontinue pour les lois élasto-plastiques non associées. Il n'y a donc que

la relation (3.11) qui mérite d'être analysée. Chambon [21] a montré que la condition de bifurcation pour les lois incrémentalement bi-linéaires s'écrit :

$$\det[L_{ijkl}^{ep}n_jn_l] = 0 \quad \text{ou} \quad \det[L_{ijkl}^e n_j n_l] = 0 \quad (3.17)$$

Étant donné que le tenseur élastique est en général défini et positif, la condition sur le tenseur élastique dans l'équation (3.17) n'est jamais satisfaite. Il n'y a donc que la première condition de cette équation à analyser. La condition de bifurcation pour les lois incrémentalement bi-linéaires s'écrit donc :

$$\det[L_{ijkl}^{ep}n_jn_l] = 0 \quad (3.18)$$

### 3.3.1.2 Critère de bifurcation appliqué à la loi Plasol

Tous les développements utilisés ici restent généraux, on peut en trouver un développement plus complet dans [18]. Nous allons maintenant appliquer le critère de bifurcation présenté précédemment à la loi Plasol. Nous écrivons ici les équations qui régissent la loi de comportement Plasol d'une façon qui diffère de ce qui a été fait dans le chapitre précédent pour rester en adéquation avec les définitions des termes utilisés dans [18]. On appelle  $F$  la surface de charge et  $G$  le potentiel plastique, on définit  $P$  et  $Q$  comme suit :

$$\begin{cases} P_{ij} = \frac{\hat{\sigma}}{2\hat{\tau}} + \frac{1}{3}\beta\delta_{ij} \\ Q_{ij} = \frac{\hat{\sigma}}{2\hat{\tau}} + \frac{1}{3}\mu\delta_{ij} \end{cases} \quad (3.19)$$

Où  $\hat{\tau}$ ,  $\mu$  et  $\beta$  sont :

$$\hat{\tau} = II_{\hat{\sigma}}, \quad \beta = \frac{2\sqrt{3}\sin\Psi}{3 - \sin\Psi}, \quad \mu = \frac{2\sqrt{3}\sin\Psi}{3 - \sin\Psi} \quad (3.20)$$

Nous avons besoin du tenseur élasto-plastique afin de calculer le déterminant du tenseur acoustique, celui-ci s'écrit :

$$L_{ijkl} = G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{(GN_{ij} + K\beta\delta_{ij})(GN_{kl} + K\mu\delta_{kl})}{H + G + \mu\beta K} \quad (3.21)$$

Où  $K$  est le module d'incompressibilité, et  $G$  le module de cisaillement. Nous rappelons ci-dessous l'expression des deux modules en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad K = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.22)$$

$N_{ij}$  est un tenseur déviatorique de contrainte normalisé  $N_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}/\hat{\tau}$ , ( $1/2N_{ij}N_{ij} = 1$ ). Il est simple de calculer le tenseur acoustique à partir de l'expression (3.21).

Les termes du déterminant du tenseur acoustique ont été calculé avec Maxima<sup>2</sup>/

2. Logiciel libre de calcul formel

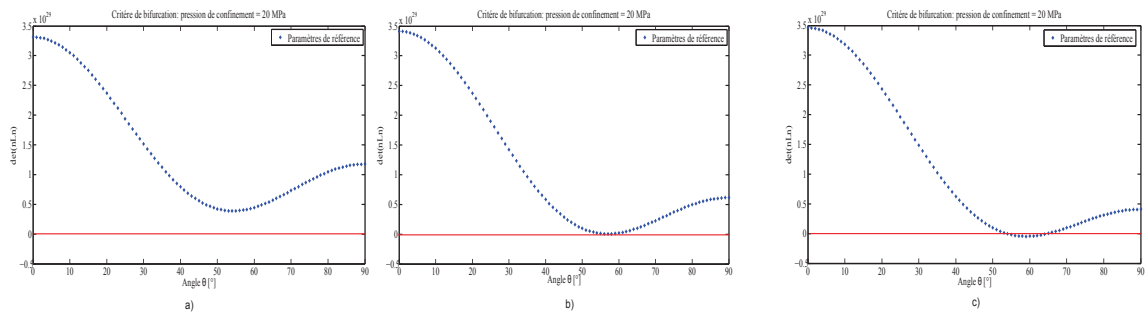
Nous exprimons ci-dessous les termes du tenseur élasto-plastique  $L_{ijkl}$ . Les termes non affichés sont nuls :

$$\left( \begin{array}{ll} L_{1111} = \frac{(-GN_{11}-\beta K)(GN_{11}+\mu K)}{\beta\mu K+H+G} + K + \frac{4G}{3} & L_{1313} = G \\ L_{1122} = \frac{(-GN_{11}-\beta K)(GN_{22}+\mu K)}{\beta\mu K+H+G} + K - \frac{2G}{3} & L_{3113} = G \\ L_{1133} = \frac{(-GN_{11}-\beta K)(GN_{33}+\mu K)}{\beta\mu K+H+G} + K - \frac{2G}{3} & L_{2121} = G \\ L_{2211} = \frac{(GN_{11}+\mu K)(-GN_{22}-\beta K)}{\beta\mu K+H+G} + K - \frac{2G}{3} & L_{1331} = G \\ L_{2222} = \frac{(-GN_{22}-\beta K)(GN_{22}+\mu K)}{\beta\mu K+H+G} + K + \frac{4G}{3} & L_{2112} = G \\ L_{3311} = \frac{(GN_{11}+\mu K)(-GN_{33}-\beta K)}{\beta\mu K+H+G} + K - \frac{2G}{3} & L_{3131} = G & L_{1221} = G \\ L_{3322} = \frac{(GN_{22}+\mu K)(-GN_{33}-\beta K)}{\beta\mu K+H+G} + K - \frac{2G}{3} & L_{2223} = G & L_{1212} = G \\ L_{3333} = \frac{(-GN_{33}-\beta K)(GN_{33}+\mu K)}{\beta\mu K+H+G} + K + \frac{4G}{3} & L_{3223} = G & L_{3232} = G \end{array} \right) \quad (3.23)$$

où  $n$  est défini par :

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

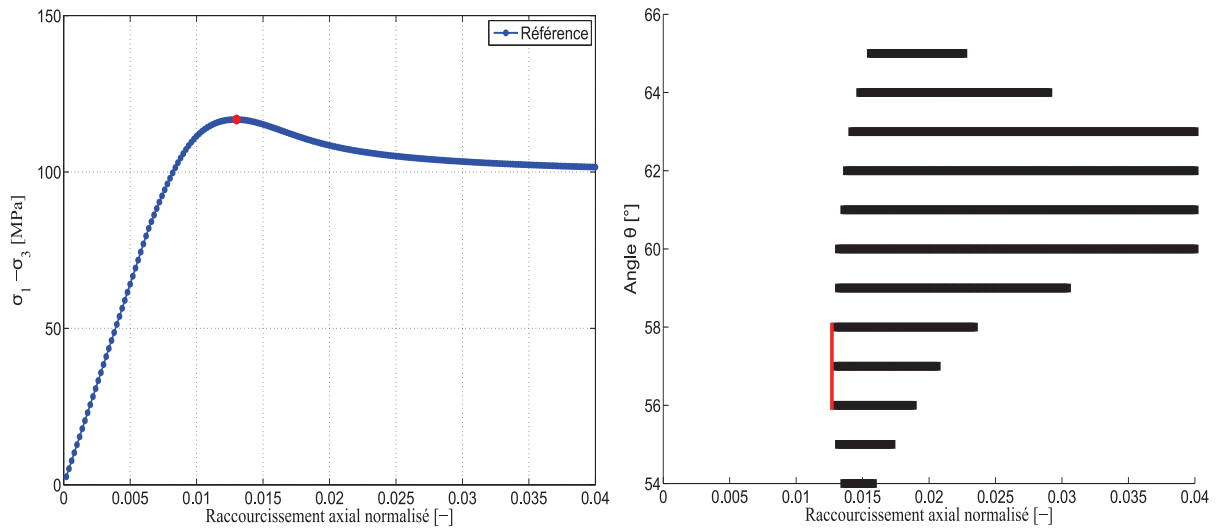
L'analyse en bifurcation pour le modèle Plasol est déjà implémenté dans le code Lagamine. Toutefois, nous l'avons reproduite dans un module de calcul externe (Matlab) pour procéder en post-traitement à un calcul du domaine d'orientations possibles pour  $\theta$ , satisfaisant au critère  $\det(nLn) \leq 0$ . Il y a en effet tout un éventail d'orientations pour lesquelles la bifurcation est a priori possible. Pour cela, nous extrayons des résultats du calcul numérique la valeur d'écroutissage  $H$  pour chaque pas, ce qui nous permet ensuite de calculer les orientations  $\theta$  pour lesquelles le déterminant est négatif.



**FIGURE 3.18** – Déterminant du tenseur acoustique en fonction de l’angle  $\theta$  pour 3 niveaux de raccourcissement

La figure 3.18 a) montre que le déterminant du tenseur acoustique est strictement positif tant que le critère de bifurcation n’est pas satisfait. Puis, le déterminant devient nul (figure 3.18 b)) pour une orientation donnée. Enfin, il existe tout un domaine d’orientations où le critère est satisfait  $[\theta_{min} \quad \theta_{max}]$  ( $det(nLn) \leq 0$  figure 3.18 c)).

Nous montrons ici les résultats obtenus pour un calcul avec le confinement de 20 MPa et les paramètres de référence. Ces résultats ont montré que le critère de bifurcation est satisfait au pic de contrainte (figure 3.19) et que l’on observe une évolution des orientations possibles dans la suite du calcul. Suivant le moment où se déclenche la localisation, nous n’avons pas les mêmes orientations. Nous avons remarqué que pour tous les calculs homogènes effectués en condition biaxiale, le critère était toujours plus ou moins satisfait au pic. Au niveau expérimental, le pic observé est une conséquence de la localisation, c’est donc le seuil de bifurcation que nous avons pour objectif de caler sur le pic de contrainte expérimental et non le pic théorique. Cependant, il se trouve que dans notre cas les deux sont presque les mêmes.



**FIGURE 3.19** – Analyse du critère de Rice appliqué au modèle Plazol pour le jeu de référence à 20 MPa de confinement (tableau 3.2. A gauche le point indique le seuil où le critère commence à être satisfait, à droite, éventail des orientations de bande pour lesquelles le critère est satisfait

Nous avons fait une étude de sensibilité sur le critère de bifurcation, que nous ne présentons pas ici. En effet, les résultats de cette étude sont faciles à deviner puisqu'il suffit de regarder sur les courbes d'étude de sensibilité l'influence de chaque paramètre sur le pic de contrainte pour connaître l'effet sur le critère de bifurcation, nous savons par exemple que le fait d'augmenter la cohésion finale fait augmenter le pic, et par conséquent retarde la localisation de la déformation.

### 3.4 Conclusions

Pour conclure, nous avons présentés à travers ce chapitre les résultats d'une étude de sensibilité sur des essais homogènes triaxiaux et biaxiaux. Cette étude de sensibilité est une toute première étape, simple mais essentielle, de l'identification de la loi de comportement enrichie que nous utilisons. Nous avons montré qu'il est tout à fait justifié d'utiliser la loi de comportement Plazol afin de modéliser le comportement du grès, et nous avons évalué l'influence de chaque paramètre de cette loi sur la réponse mécanique globale de l'échantillon. Cette étude de sensibilité permet de trouver les paramètres pertinents pour caler la courbe numérique à la partie homogène de la courbe expérimentale. Nous avons ainsi déduit les valeurs du module de Young, du coefficient de Poisson, la valeur de la cohésion initiale et du frottement initial. Les résultats obtenus par l'analyse de bifurcation montrent que le critère est dans la plupart des cas satisfait

au niveau du pic de contrainte. Nous montrons également comment évolue, après ce seuil, le domaine des orientations possibles de bande.

---

### Choix des paramètres numériques

---

La méthode d'identification implique une comparaison entre les données expérimentales et numériques. Nous avons fixé à partir des essais expérimentaux un certain nombre d'observables qui consistent en la contrainte au pic, la déformation axiale au pic, la valeur du palier de contrainte, la déformation volumique, ainsi que la largeur et l'orientation de la bande. A ce stade de l'étude, les seuls observables qu'il est possible d'extraire des données numériques sont le pic et le palier de contrainte.

L'extraction des grandeurs issues de calculs correspondant au pic et palier de contrainte est trivial. Nous présentons ici les outils développés pour obtenir les grandeurs concernant la localisation et les variations de volumes. Ces développements ont été réalisés avec le langage de programmation Matlab. De plus nous montrons la méthode suivie pour choisir certains aspects numériques, à savoir :

- Le maillage
- Conditions aux limites du problème
- Les paramètres liés à la convergence du calcul



## 4.1 Outils d'exploitation des données numériques

### 4.1.1 Calcul de la largeur et de l'orientation de la bande

Afin de calculer la largeur et l'orientation de la bande, nous considérons un calcul biaxial hétérogène avec plusieurs éléments. Pour distinguer les points matériels à l'intérieur de la bande et ceux à l'extérieur, c'est-à-dire les points qui sont respectivement, en chargement plastique et ceux qui sont en régime élastique, nous traçons le champ d'une variable interne binaire, indiquant le régime plastique ou élastique (variable  $I_{YIELD}$ ). A titre d'exemple, la figure 4.1 représente les points de Gauss en charge plastique. Un carré bleu est dessiné lorsque « $I_{YIELD}$ »=1 à chaque point de Gauss.

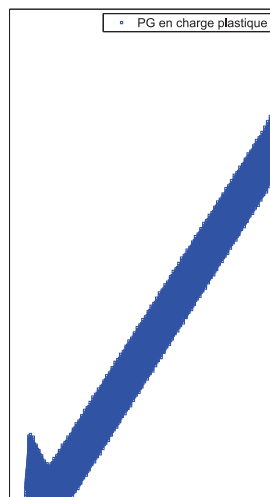


FIGURE 4.1 – Localisation de la déformation pour un essai biaxial

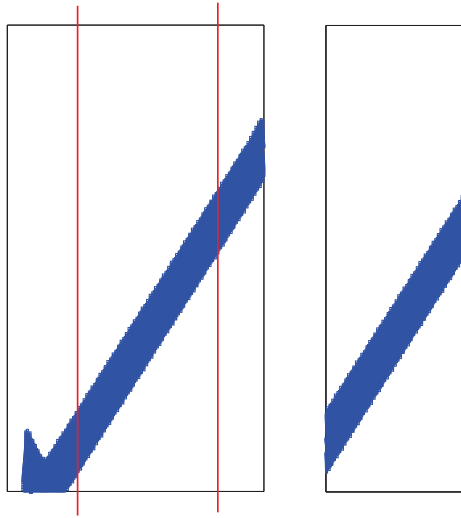
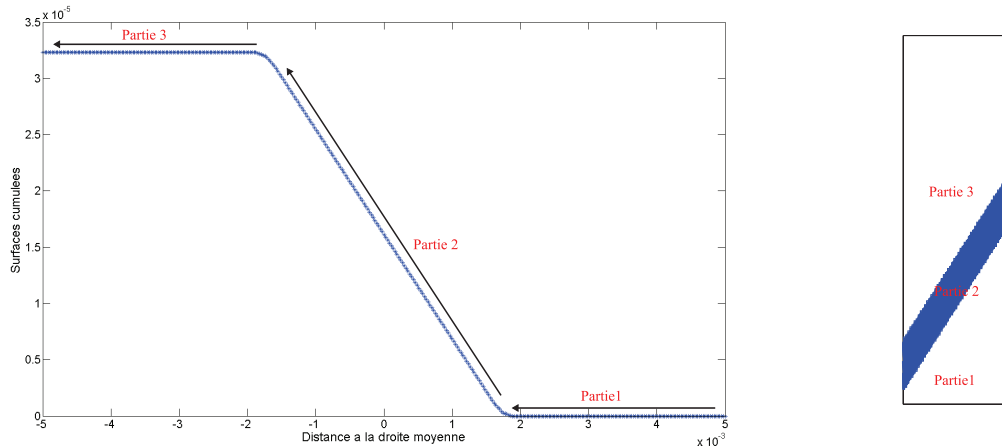


FIGURE 4.2 – Zone de la bande où la largeur et l'orientation seront calculées

Afin de calculer la largeur de la bande nous commençons par fixer une zone de la bande où celle-ci sera calculée. Nous évitons les parties de l'échantillon où la bande est réfléchie afin de nous prémunir des éventuelles perturbations dues aux bords de l'échantillon. Nous faisons traverser deux droites verticales aux abscisses  $x_1=0.005\text{m}$  et  $x_2=0.02\text{m}$ . Ces droites permettent de garder les deux nouveaux bords de la bande, plus ou moins parallèles. La zone choisie est la même pour tous les calculs, sauf ceux qui présentent plusieurs bandes. Une fois cette zone sélectionnée, nous faisons une régression linéaire afin de déterminer l'orientation de la bande. La droite obtenue à l'issue de cette régression est appelée (DI).

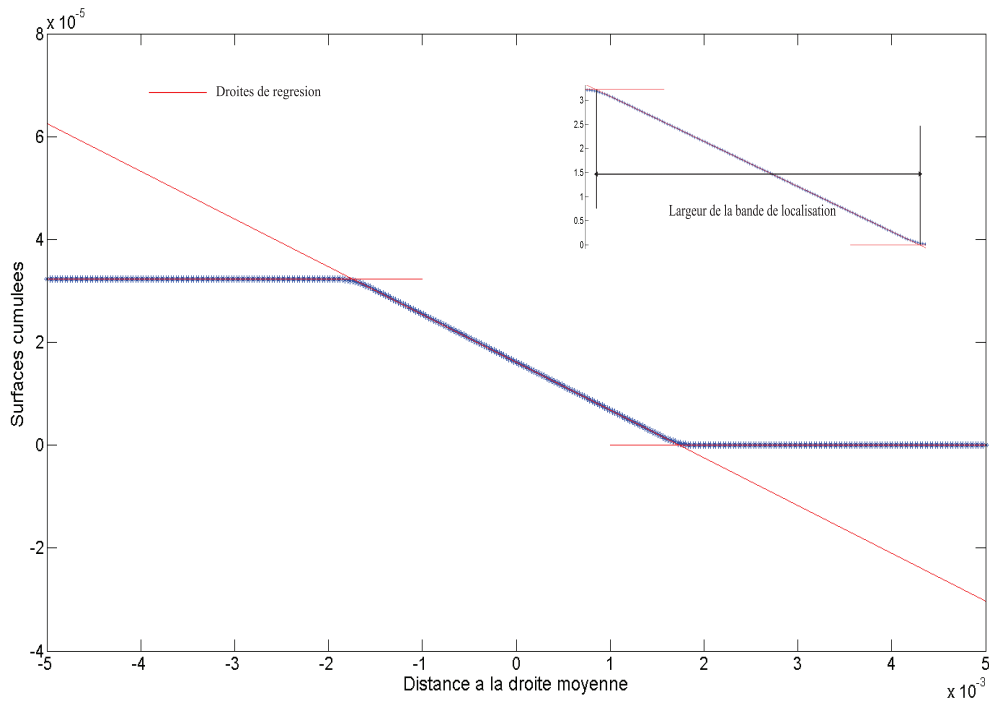
Dans le but de calculer la largeur de la bande, nous définissons un demi plan par une droite (DV) qui est parallèle à la droite (DI). Cette droite (DV) est translatée progressivement afin de traverser au final toute la bande dans son épaisseur. Nous comptons à chaque fois le nombre de points de Gauss en charge appartenant au demi-plan défini par cette droite. A chaque point de Gauss, nous attribuons la surface de l'élément auquel il appartient. Cette surface est calculée dans la configuration initiale et est donc la même pour tous les points de Gauss lorsque le maillage est régulier. Nous comptons donc, la surface associée aux points de Gauss et non pas les points eux mêmes. Cette technique n'a aucun impact sur le calcul de la largeur quand le maillage utilisé est régulier. Cependant elle est conseillée si le maillage est irrégulier, car elle introduit une pondération correspondant à la surface de l'élément.



**FIGURE 4.3** – Méthode de calcul de la largeur de bande

La figure 4.3 montre le nombre total de points cumulés (surfaces cumulées) en fonction de la distance entre la droite virtuelle (DV) et la droite (DI). Au départ du calcul, la droite (DV) se situe dans la partie 1 de l'échantillon (figure 4.3). Dans toute cette partie, le demi plan ne contient aucun point de Gauss en charge plastique. Puis la droite rentre dans la partie 2, le nombre de points de Gauss en charge contenus dans le demi plan commence donc à augmenter. Une fois arrivée à la partie 3, la droite (DV) ne rencontre plus de points de Gauss en charge, le nombre de points cumulés reste constant.

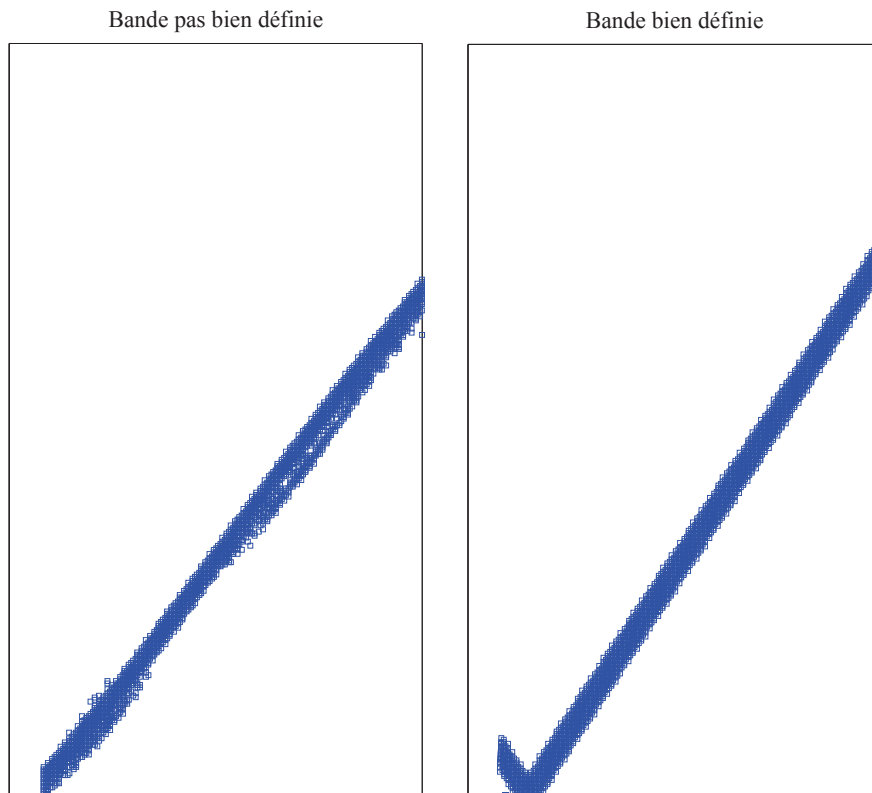
Pour calculer la largeur de la bande, une droite de régression linéaire est définie pour chaque partie (figure 4.4). Pour la partie 1 la droite de régression est d'abord calculée à l'aide des 3 points qui se situent à l'extrémité de cette partie. Cette droite est recalculée à chaque fois qu'un point est rajouté aux 3 premiers. Un point est inclut dans la régression si sa distance par rapport à la droite initialement définie est inférieur à une valeur donnée par l'utilisateur. La droite de régression est calculée de la même manière pour les parties 1 et 3. Cependant, pour la partie 2 la première droite de régression est calculée à partir de 3 points qui se trouvent au centre de cette partie et non à l'extrémité. L'intersection de ces 3 droites donne la largeur de la bande.



**FIGURE 4.4** – Les trois droites de régression qui permettent de calculer la largeur de la bande

Il est important de définir l'erreur de mesure liée aux calculs de la largeur de la bande. Cette erreur est d'une part, liée à la régression linéaire qui est moins précise si la bande n'est pas bien définie (figure 4.5). D'autre part, le choix de la fenêtre sur laquelle nous effectuons la régression a une influence sur la largeur de la bande. Nous avons mené une étude de sensibilité en variant les dimensions de la fenêtre et en observant l'influence de cette variation sur la largeur de la bande pour un même calcul. Cette étude a montré que les dimensions de la fenêtre ont peu d'influence sur la largeur si la bande est bien définie. La distance seuil qui permet d'inclure des points dans la régression linéaire a elle aussi un impact sur le calcul de la largeur. D'après l'étude de sensibilité que nous avons effectué, nous observons une erreur de 2.5 %, celle-ci devrait être comparée à l'erreur de mesure expérimentale, qu'il est difficile de déterminer.

L'orientation de la bande est mesurée dans la configuration actualisée et est mesurée par rapport à l'horizontal. La mesure de l'orientation de la bande reste assez précise même si elle dépend, elle aussi de la fenêtre où la largeur est calculée ainsi qu'au caractère plus ou moins bien défini de la bande.



**FIGURE 4.5** – Différence entre une bande bien définie (à droite) et une bande mal définie (à gauche)

### 4.1.2 Méthode de calcul de la déformation volumique

Il est possible d'obtenir les courbes de déformation volumique globale expérimentalement. Ces courbes font partie des observables utilisés pour l'identification. Il est donc pertinent d'avoir aussi ces courbes à partir des calculs numériques.

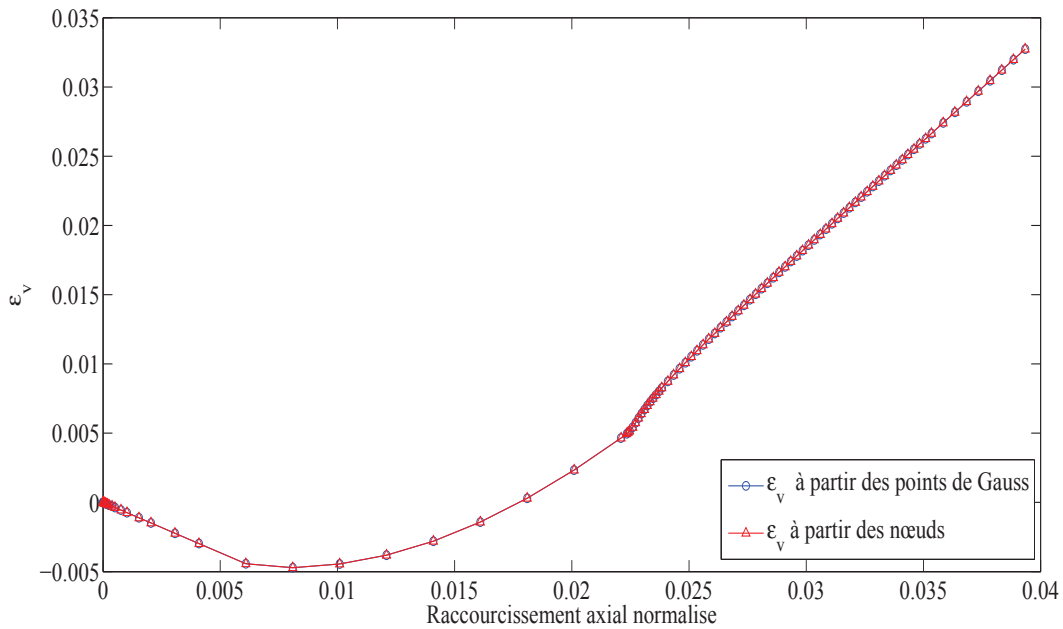
Pour un calcul homogène avec un élément, la déformation volumique est simple à calculer, c'est la somme des déformations  $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ . Puisque pour l'essai biaxial la condition de déformation plane est imposée,  $\varepsilon_z = 0$ . La déformation volumique globale est calculée par  $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ .

Lorsque le résultat du calcul est hétérogène, il n'est plus possible de calculer la déformation volumique de la même manière. En effet chaque élément a alors une déformation volumique différente. Les éléments dans la bande se déforment beaucoup plus que les éléments qui sont en dehors de la bande. Afin donc d'obtenir la déformation globale de l'échantillon, nous calculons pour chaque pas de temps sa surface globale en additionnant les surfaces des éléments et nous en déduisons la déformation volumique

(équation (4.1)). La déformation volumique s'appuie ici sur la surface du quadrilatère défini par les quatre points de Gauss qui le constitue. Au départ nous avons calculer la surface de l'élément à partir des 8 nœuds qui le définissent. Nous avons noté que ces 2 méthodes étaient équivalentes (figure 4.6). Pour des raisons pratiques, nous avons utilisée la première.

$$\varepsilon_v = \frac{(S_f - S_0)}{S_0} \quad (4.1)$$

Où  $S_0$  est la surface initiale de l'échantillon,  $S_f$  est la surface calculée à la fin de chaque pas de temps. Ce calcul de la déformation volumique globale est similaire au calcul effectué sur les résultats expérimentaux basés sur les champs cinématiques obtenus par corrélation d'image.



**FIGURE 4.6** – Évolution de la déformation volumique globale en fonction du raccourcissement axial normalisé

### 4.1.3 Caractérisation de la nature de la bande

Comme il est possible de savoir expérimentalement si la bande de localisation est compactante ou dilatante, nous avons développé un outil qui permet de savoir si la bande observée à partir des résultats numériques est compactante ou dilatante. Il faut noter que les données expérimentales montrent que la bande est dilatante pour les essais menés sur le grès dans le domaine de confinement étudié ici. Afin de connaître la nature de la bande, nous choisissons un vecteur dans celle-ci défini par les coordonnées

des noeuds définissant les extrémités du vecteur. Nous suivons ensuite l'évolution des composantes de ce vecteur dans le repère local (figure 4.8) de la bande, pour cela nous effectuons un changement de repère classique de la manière suivante :

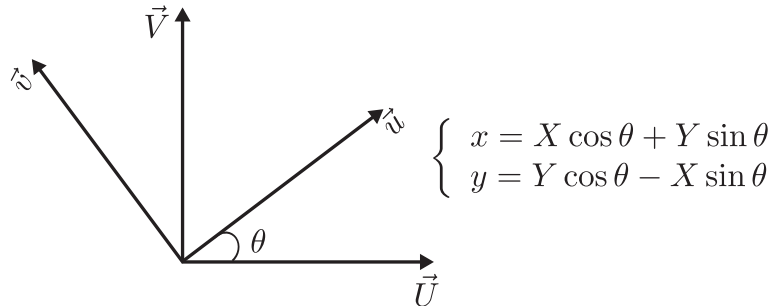


FIGURE 4.7 – Représentation du repère locale de la bande et le repère principal

Dans l'expression ci-dessus,  $x$  et  $y$  sont définis dans le repère local.  $X$  et  $Y$  sont les coordonnées dans le repère principal. Les deux repères sont représentés dans la figure ci-dessous. Les points qui définissent le vecteur, sont repérés au cours du chargement grâce à leurs numéros de nœuds.

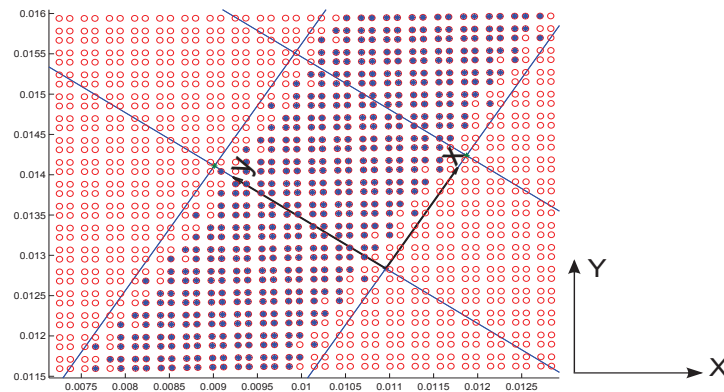
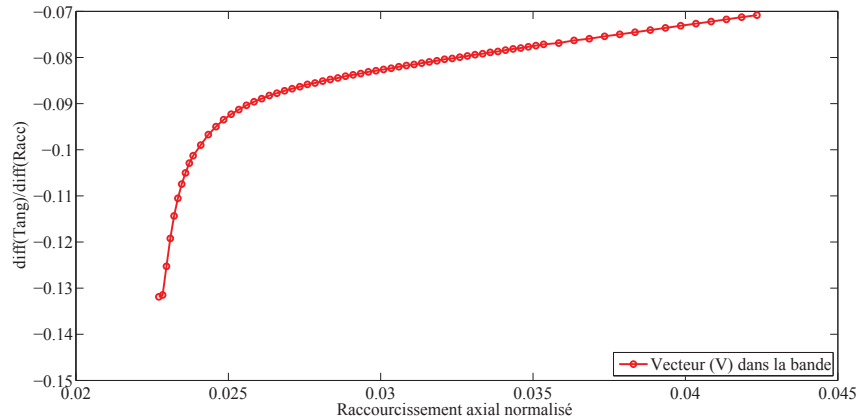


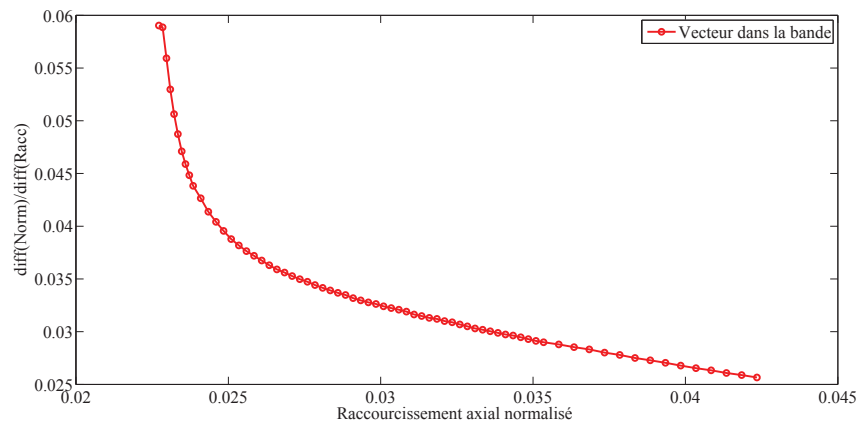
FIGURE 4.8 – Définition du repère local de la bande, les points en rouge sont les points de Gauss en décharge élastique, en bleu sont les points de Gauss en charge plastique

Nous appellerons le vecteur choisi dans la bande le vecteur  $V$ . Ainsi il est possible à partir de l'évolution des composantes du vecteur de savoir si la bande est compactante ou dilatante.



**FIGURE 4.9** – Évolution de l'incrément de la composante tangentielle normalisé par l'incrément de raccourcissement axial en fonction du raccourcissement, pour le vecteur  $V$  interne à la bande

La courbe ci-dessus montre que la composante tangentielle diminue de façon significative dès l'apparition de la localisation, puis cette diminution devient moins importante après un niveau de raccourcissement de 0.026. L'incrément de la composante tangentielle reste négatif, cela montre que la composante continue à diminuer.



**FIGURE 4.10** – Évolution de l'incrément de la composante normale normalisé par l'incrément de raccourcissement en fonction du raccourcissement, pour le vecteur  $V$  interne à la bande

La figure 4.10 présente l'évolution de l'incrément de la composante normale normalisé par l'incrément de déplacement pour le vecteur  $V$  à l'intérieur de la bande. Contrairement à la composante tangentielle, la composante normale a tendance à augmenter puisque son incrément est toujours positif. Comme pour la composante tangentielle, la



composante normale augmente rapidement au début de la localisation, cette augmentation est moins importante à partir du raccourcissement 0.026.

Les résultats de l'évolution du vecteur  $V$  au cours du chargement, montrent que la composante normale de ce vecteur augmente alors que sa composante tangentielle diminue. Nous en déduisons que la bande est dilatante, ce qui correspond à ce qui est observé expérimentalement.

#### 4.1.4 Profil de déplacement dans la bande

Tracer le profil de vitesse de déplacement dans la bande, permet de calculer sa largeur d'une manière différente qu'en utilisant la largeur de la zone des points en charge. Il est ainsi possible d'avoir une autre estimation de la largeur de la bande. Ce qui permet la validation de la méthode que nous avons présentée précédemment pour le calcul de la largeur.

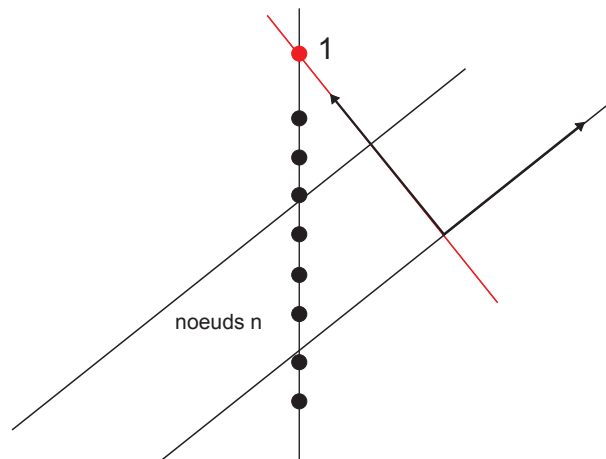


FIGURE 4.11 – Nœuds pour lesquels le profil de déplacement est calculé

Le déplacement relatif de chaque nœud est calculé à partir de la différence entre l'incrément de déplacement pour ce nœud et l'incrément de déplacement d'un nœud proche mais externe à la bande (nœud 1) (figure 4.11),  $\delta \vec{v}_{node} = \delta \vec{u}_{node} - \delta \vec{u}_1$ . Les nœuds qui permettent d'obtenir le profil de vitesse dans la bande sont choisis de telle manière qu'ils forment une ligne verticale dans la configuration initiale (figure 4.12). Les coordonnées sont calculées dans le repère local de la bande.

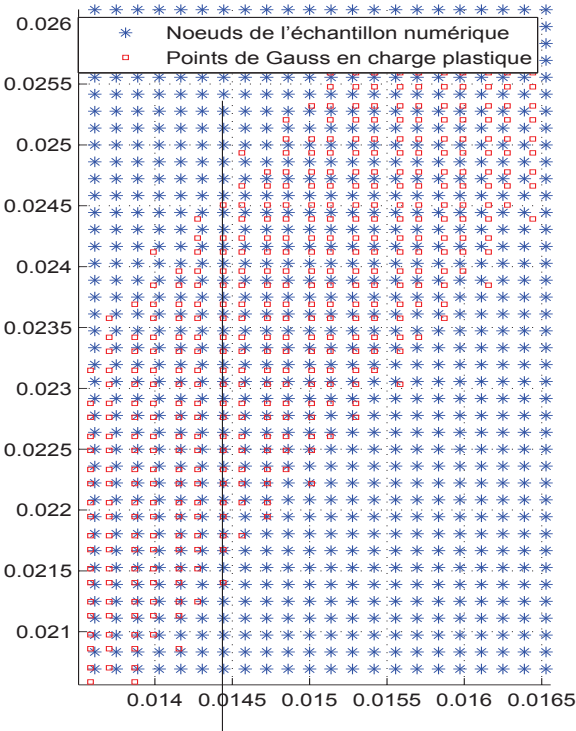


FIGURE 4.12 – Le profil de déplacement est obtenu pour un alignement vertical de noeuds

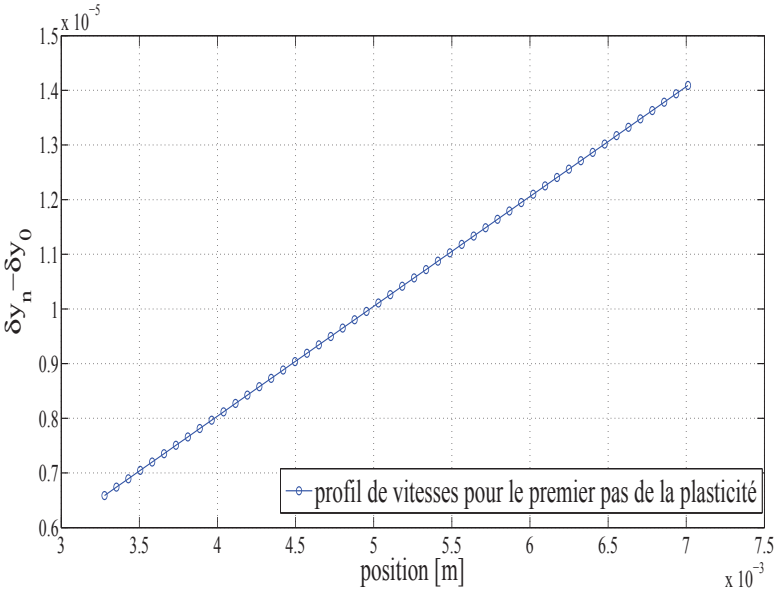
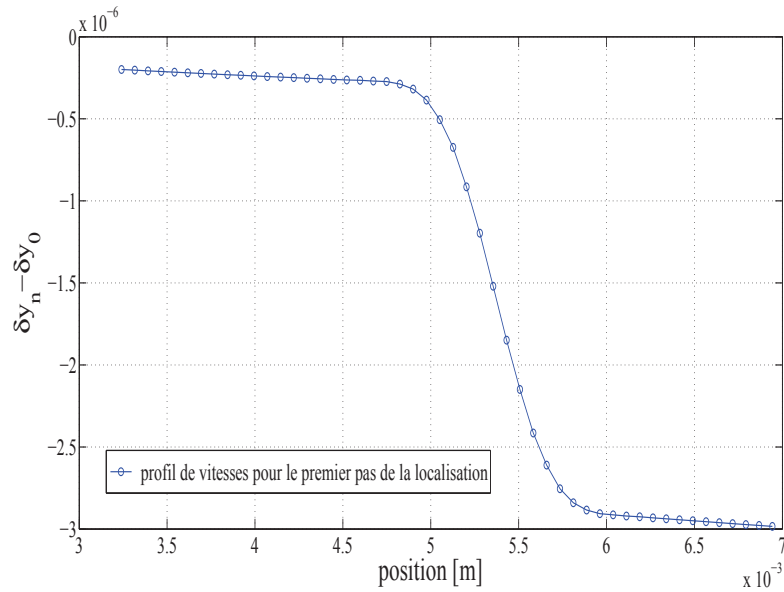


FIGURE 4.13 – Variation du déplacement relatif des noeuds en fonction de leur position (distance par rapport à l'axe (oy) du repère local de la bande) au premier pas de la plasticité (régime de déformation homogène)



**FIGURE 4.14** – Profil de déplacement incrémental des nœuds en fonction de leur position (distance par rapport à l’axe  $(oy)$  du repère local de la bande) pour un pas où le calcul a localisé

Les figures 4.13 4.14 montrent le profil de déplacement incrémental, pour deux pas de temps. La première représente le début de la plasticité et la seconde un pas où le calcul a localisé. Nous remarquons que pour le premier profil le déplacement des nœuds augmente linéairement avec leur distance (figure 4.13). Le profil de déplacement pour le pas localisé peut être divisé en trois parties selon la valeur du gradient du déplacement. La partie centrale présente les nœuds qui sont à l’intérieur de la bande. Les deux autres parties du profil présentent les zones où les nœuds sont situés aux bords et aux extrémités de la bande. L’intersection de ses 3 parties permet de définir une largeur de bande à partir de la cinématique. Sur un exemple réel, nous avons comparé la largeur de bande déterminée par les deux méthodes. L’estimation est proche à 4 %. Notons que le profil de vitesses permet non seulement de calculer la largeur de la bande mais de suivre également de manière plus complète la formation des bandes, dans le cas où il y a plusieurs bandes parallèles et très proches l’une de l’autre (Annexe A).

## 4.2 Choix du maillage et du paramètre second gradient $D$

Afin d’obtenir une largeur de bande de l’ordre de 1 mm, ordre de grandeur de ce qui est observé expérimentalement et de garantir l’objectivité des calculs, il est important

de choisir avec précaution le type de maillage à utiliser (taille des éléments et leurs structures) ainsi que la valeur du paramètre second gradient  $D$ . Plus  $D$  est petit, plus la largeur de la bande est petite, sachant que la largeur varie approximativement avec  $\sqrt{D}$ . Cependant il faut s'assurer que la largeur est traversée par au moins 3 éléments pour avoir une bonne description de la déformation dans celle-ci [38]. Il faut donc trouver la valeur du paramètre second gradient qui permet d'obtenir une largeur de bande de l'ordre de 1 mm, et de la même manière un maillage suffisamment fin pour que cette bande soit traversée par plus de trois éléments.

### 4.2.1 Calculs avec un maillage de 200 et 1800 éléments

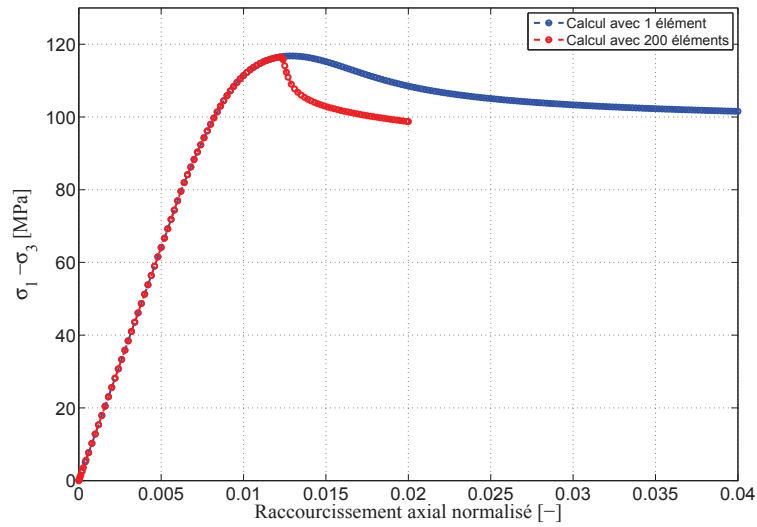
Afin d'obtenir le maillage et le paramètre second gradient permettant d'avoir une largeur de bande de 1 mm traversée par 3 éléments. Nous avons commencé par faire des calculs avec un maillage de 200 éléments de section carrée. Nous avons comparé la courbe de chargement pour un calcul homogène et un calcul hétérogène effectué avec les mêmes paramètres constitutifs. Nous avons utilisé un élément affaibli de 2.5 mm de côté en bas à gauche de l'échantillon afin de forcer la position de la bande. Cet élément a la taille d'un élément du maillage de 200 éléments. Pour le maillage avec 1800 éléments, nous avons conservé la même taille de zone affaiblie que pour celui à 200 éléments, afin de comparer objectivement ces maillages sans avoir une influence de cette zone sur les résultats.

Nous présentons ici les deux calculs où un déplacement axial d'un 1 mm est imposé ainsi qu'un confinement latéral de 20 MPa. Ci-dessous les paramètres constitutifs du modèle.

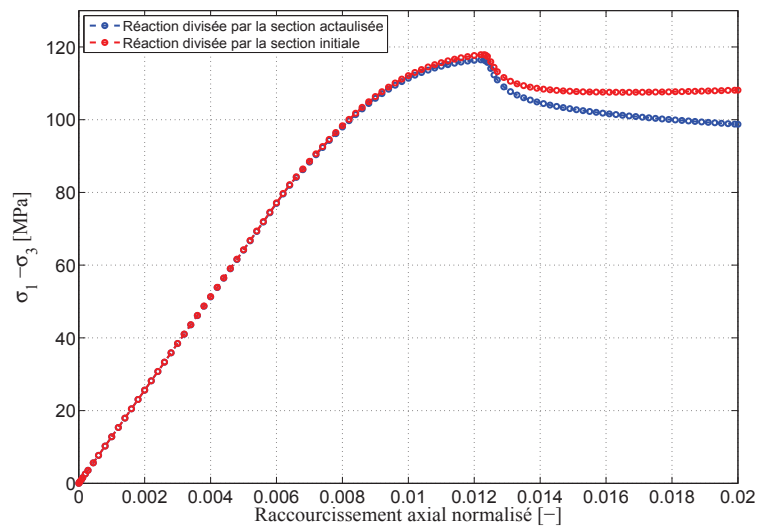
$u_2$	P	E	$\nu$	$c_i$	$c_f$	$\varphi_i$	$\varphi_f$	$\beta_c$	$\beta_\varphi$	$\Psi$	$D$
1 mm	20 MPa	12.2 GPa	0.215	32.5 MPa	12 MPa	4°	21°	0.005	0.001	24°	1 N

TABLE 4.1 – Paramètres du modèle pour le calcul avec un maillage de 200 éléments

L'élément en bas à gauche est affaibli de 5% sur la cohésion initiale, pour cet élément la cohésion initiale est donc  $c_i = 30.875 MPa$ .



**FIGURE 4.15** – Évolution de la contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé pour un calcul homogène et un calcul avec localisation (maillage de 200 éléments)

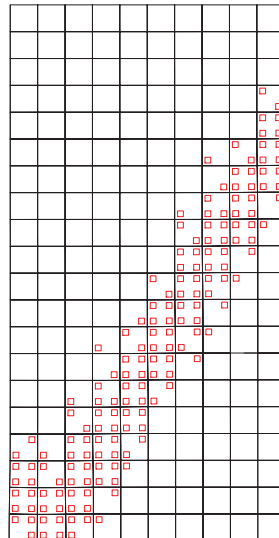


**FIGURE 4.16** – Évolution de la contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé. La contrainte est calculée en divisant la réaction par la section actualisée d'une part puis en la divisant par la section initiale d'autre part.

Sur la figure 4.15, nous présentons l'évolution de la contrainte déviatorique (contrainte de Cauchy) en fonction du raccourcissement axial normalisé, pour un calcul homogène effectué avec 1 élément et un calcul hétérogène effectué avec 200 éléments. Pour le calcul hétérogène la contrainte est calculée en divisant la somme des réactions à la base

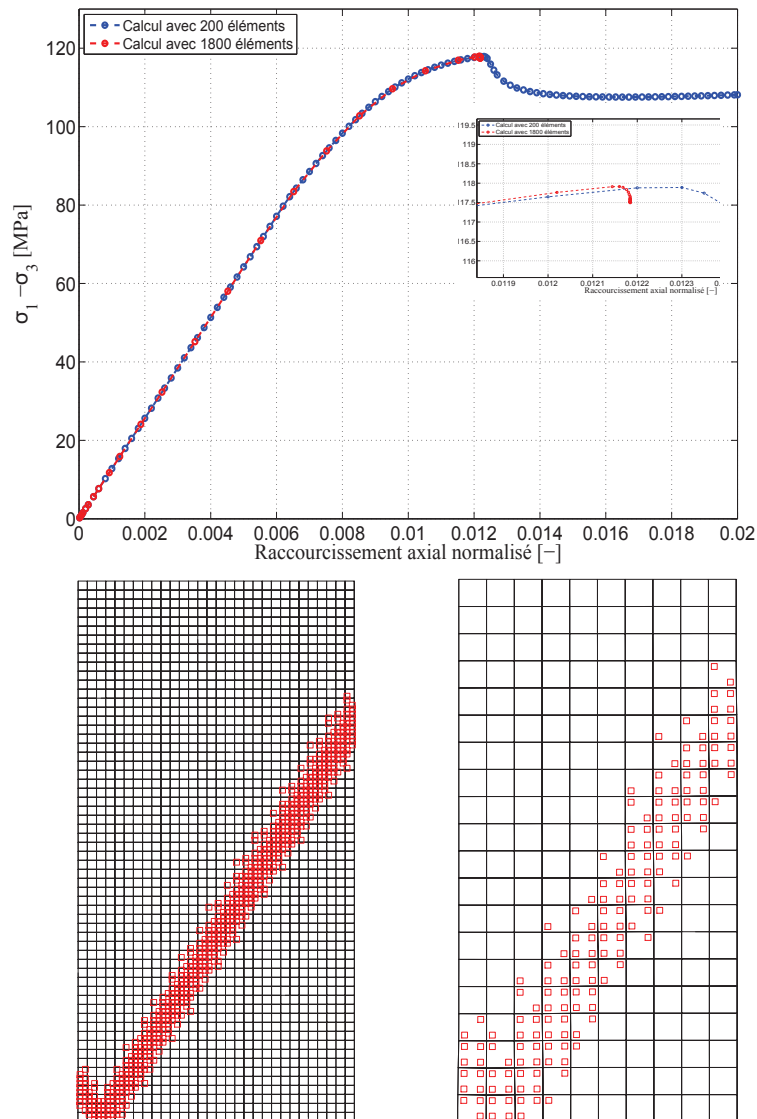
du biaxial par sa largeur actualisée à chaque pas de temps. Nous remarquons que les deux courbes coïncident parfaitement jusqu'au moment où le calcul avec 200 éléments localise. Le pic de contrainte pour le calcul hétérogène et le calcul homogène sont très proches. L'adoucissement est plus important pour le calcul avec 200 éléments en raison de la localisation de la déformation.

La figure 4.16 montre que le fait de diviser la somme des réactions par la section initiale (contrainte de Piola-Kirchhoff) surestime la contrainte par rapport à une contrainte de Cauchy. Ceci s'explique simplement par le fait qu'au cours du chargement le bas de l'échantillon se déforme, donc la section augmente. La contrainte est donc plus faible si elle est calculée à partir d'une section actualisée. Afin de comparer la courbe de chargement obtenue par le calcul numérique avec celle obtenue lors de l'essai expérimental, nous prendrons en compte uniquement la contrainte de Piola-Kirchhoff (force divisée par la section initiale).



**FIGURE 4.17** – La bande de localisation au dernier pas de calcul. Le raccourcissement est de 0.02. Les points rouges sont les points de Gauss en charge plastique

La figure 4.17 montre la bande de localisation à la fin du chargement pour un raccourcissement de 0.02. Nous constatons que la bande est constituée de moins de 3 éléments, ce qui n'est pas suffisant pour avoir une bonne description de sa déformation. Nous avons donc décidé de raffiner le maillage afin d'avoir plus d'éléments dans la bande.



**FIGURE 4.18** – A gauche une bande de localisation correspondant à un niveau de raccourcissement de 0.609 et un calcul effectué avec 1800 éléments. A droite la bande de localisation minimale obtenue pour le calcul effectué avec 200 éléments

Étant donné que pour le calcul avec 200 éléments nous avons une largeur de bande traversée par moins de 3 éléments, et que la largeur de cette bande est bien supérieure à notre objectif (largeur d'environ 1 mm). Nous avons fait un calcul en réduisant la taille des éléments ainsi que la valeur de  $D$ . Nous avons donc effectué un calcul, avec 1800 éléments, les paramètres constitutifs utilisés pour ce calcul sont présentés au tableau 4.1. Pour réduire la largeur, nous prenons  $D = 0.02N$ .

La figure 4.18 montre l'évolution de la contrainte déviatorique en fonction du raccour-

cissement axial normalisé. Nous remarquons sur cette figure que le pic de contrainte est le même pour les deux calculs effectués avec 200 et 1800 éléments. Le calcul avec 1800 éléments ne converge plus après le pic. Nous pensons que ceci est dû à un fort adoucissement causé par la réduction significative de la largeur de bande (il est bien connu que plus la bande est fine, plus le radoucissement de la réponse de l'échantillon numérique est forte). Cet adoucissement a induit un phénomène de snapback (contrôle en déplacement du calcul impossible), ce problème sera traité dans la dernière section de ce chapitre. Nous remarquons aussi que malgré l'utilisation d'un maillage plus fin, la largeur de la bande est toujours traversée par moins de 3 éléments.

Nous déduisons de ces deux calculs, qu'il est important de réduire d'avantage la taille des éléments, et qu'il serait plus judicieux de faire des calculs avec plusieurs valeurs de  $D$  afin de savoir celle qui nous permet d'atteindre notre objectif.

#### 4.2.2 Calcul avec un maillage de 7200 éléments et des maillages non structurés

Afin d'atteindre notre objectif en terme de largeur de bande, nous avons effectué plusieurs calculs avec un maillage de 7200 éléments, en variant pour chaque calcul la valeur de  $D$ . En raison de la durée de ces calculs (plus de 3 jours), nous avons décidé de faire des calculs avec des maillages non structurés. La taille des éléments est réduite dans la zone où la localisation est susceptible d'avoir lieu. Ces maillages ont été construits à l'aide du logiciel GiD développé par CIMNE (International Center of Numerical Methods in Engineering, Barcelone)

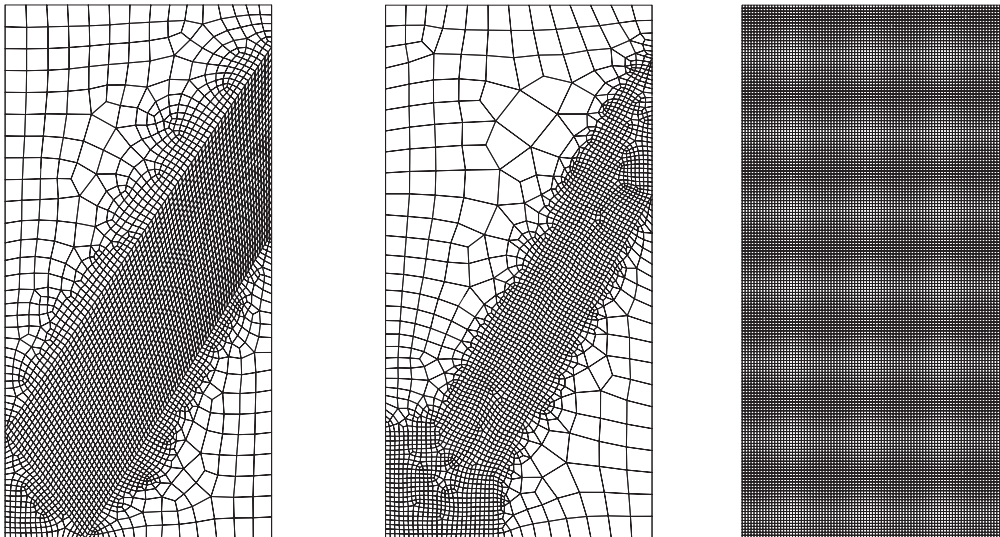


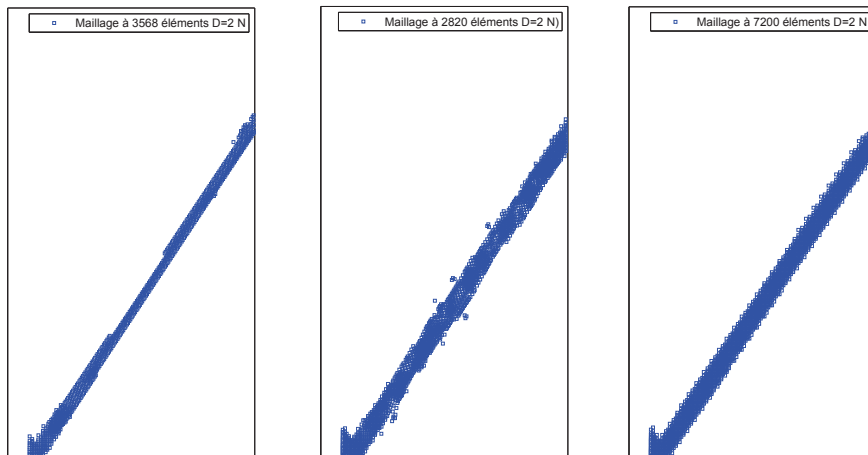
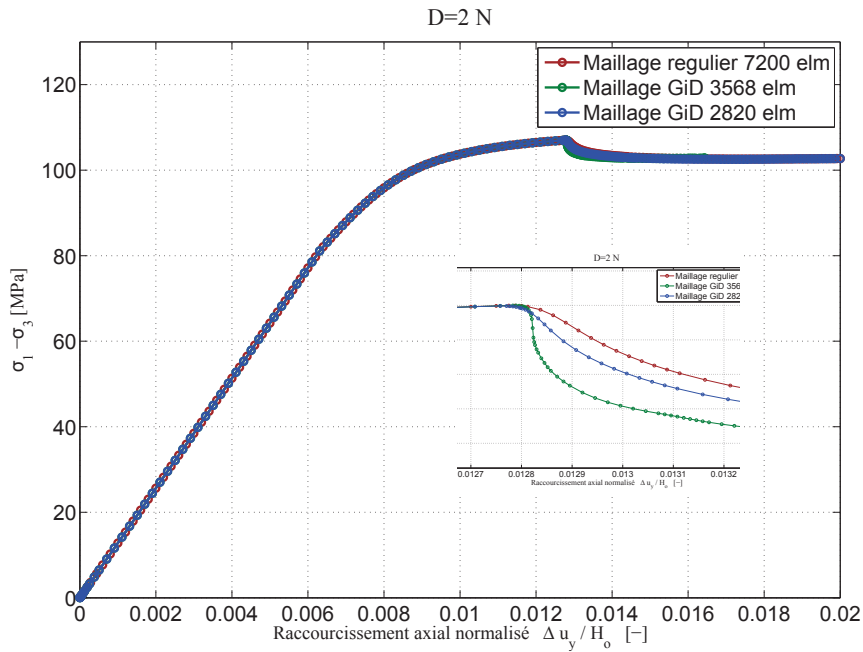
FIGURE 4.19 – Deux maillages non structurés de 3568 et 2820 éléments et un maillage structuré de 7200 éléments



$u_2$	P	E	$\nu$	$c_i$	$c_f$	$\varphi_i$	$\varphi_f$	$\beta_c$	$\beta_\varphi$	$\Psi$
1 mm	20 MPa	12.2 GPa	0.215	32.5 MPa	12 MPa	4°	21°	0.003	0.001	18°

**TABLE 4.2** – Paramètres du modèle pour le calcul avec un maillage de 7200 éléments et les maillages non structurés

Nous utilisons pour ces calculs les paramètres constitutifs présentés au tableau 4.2. Nous effectuons ces calculs avec plusieurs valeurs de  $D$ , afin de trouver la valeur qui nous permet d'avoir une largeur de bandes de 1 mm, comme ce qui est observé expérimentalement.

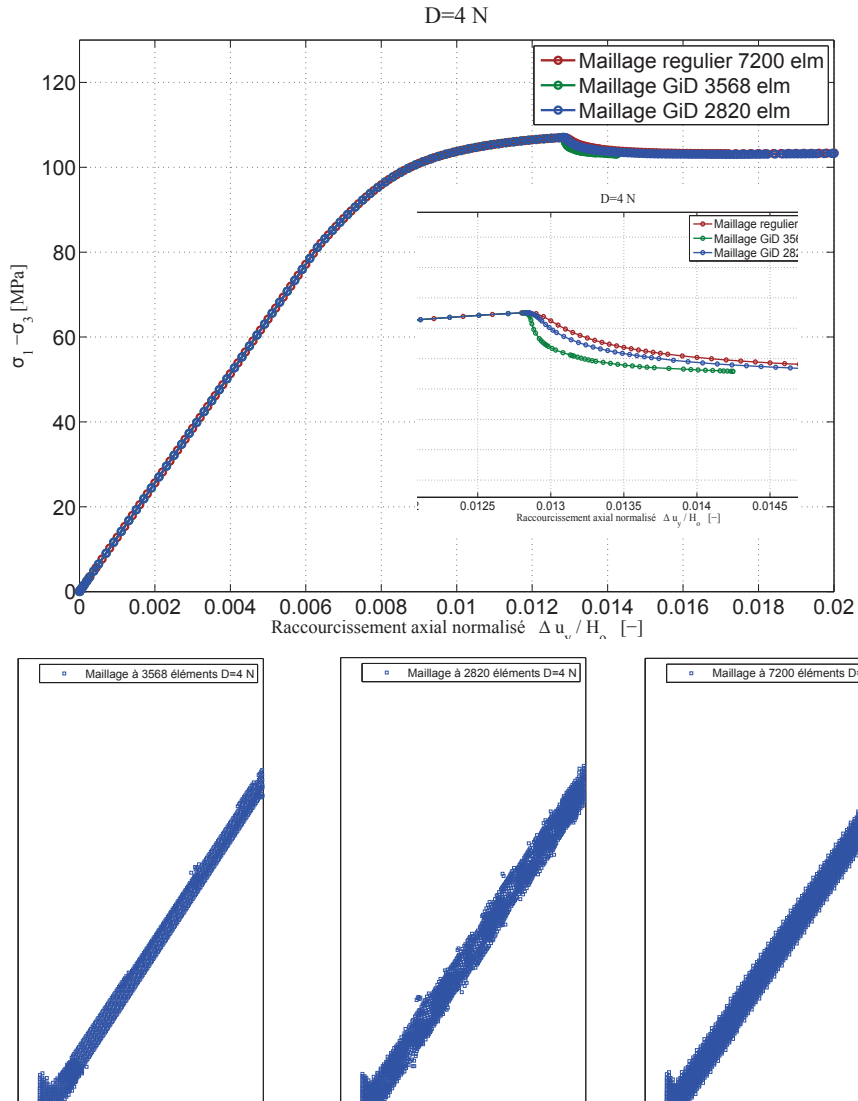


**FIGURE 4.20** – Courbes de chargement et bandes de localisation pour 3 calculs effectués avec les trois maillages  $D=2N$ . Pour chaque calcul, nous montrons la bande à un moment où sa largeur est la plus petite

Dans un premier temps nous avons utilisé les 3 maillages en conservant la même valeur de  $D = 2N$ . Les résultats (figure 4.20) montrent que quelle que soit la forme du maillage, nous obtenons le même pic de contrainte. Néanmoins la réponse post-pic change légèrement. En effet, pour les deux maillages irréguliers, la bande ne traverse que 2 éléments et son épaisseur est inférieure à 1 mm. De plus la bande est irrégulière : la largeur de bande est différente le long de la bande.

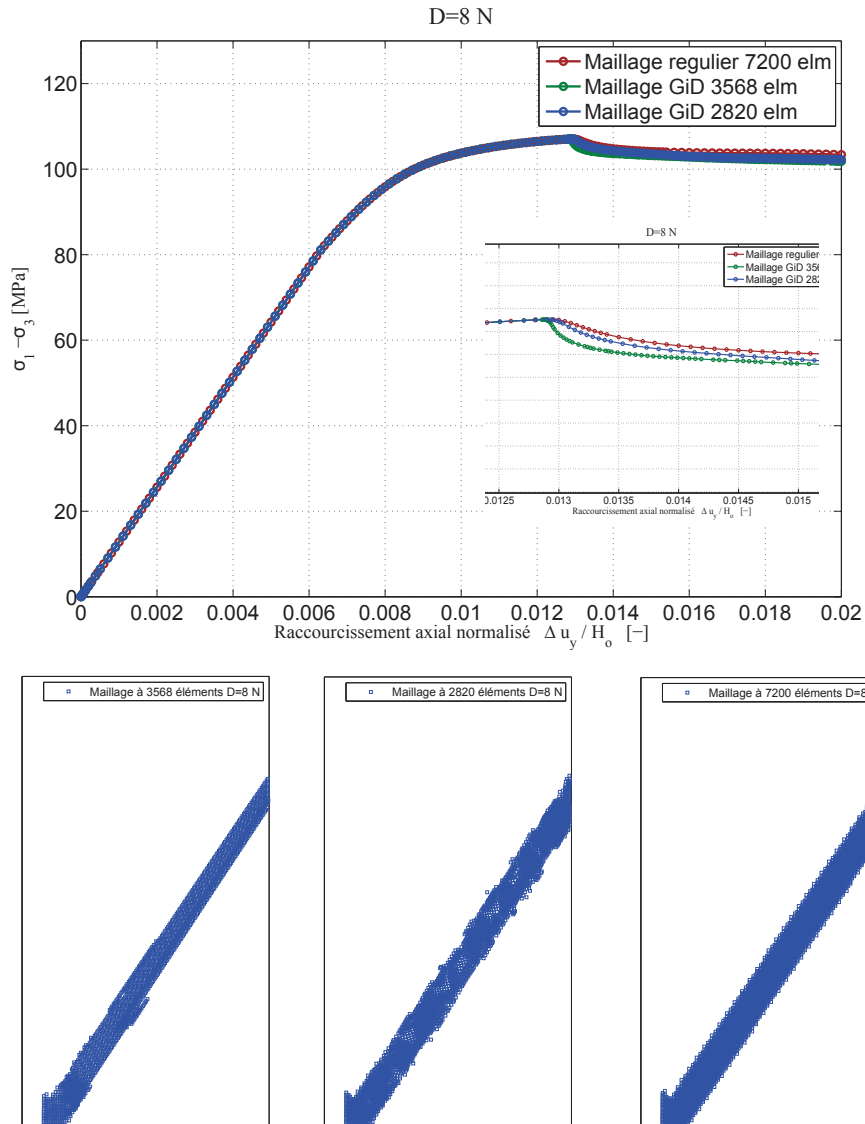
La valeur de  $D$  est donc trop petite pour ces deux maillages pour assurer l'objectivité

des calculs. Cependant elle est suffisamment grande pour le maillage à 7200 éléments (la bande est traversée par plus de 3 éléments).



**FIGURE 4.21** – Courbes de chargement et bandes de localisation pour 3 calculs effectués avec les trois maillages et  $D=4 N$ . Pour chaque calcul, nous montrons la bande à un moment où sa largeur est la plus petite

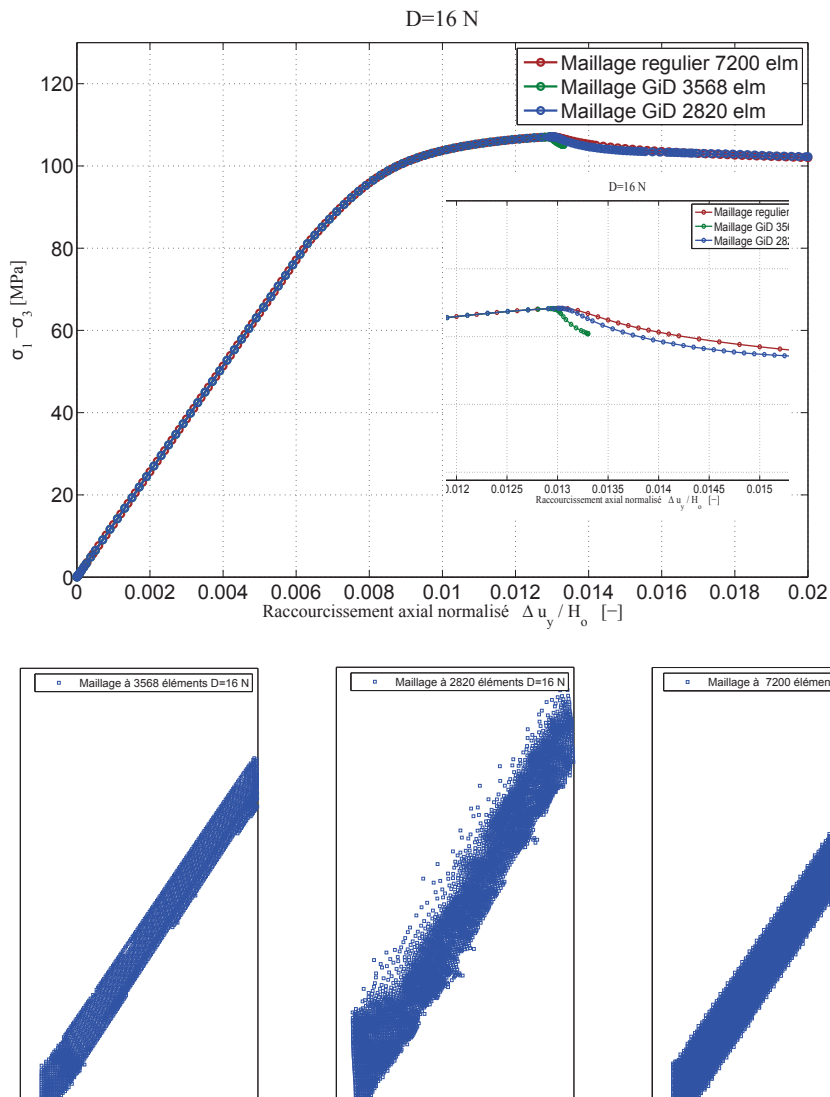
Dans un second temps, nous avons choisi  $D = 4N$  pour les 3 maillages (figure 4.21). L'évolution de la contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé est cette fois-ci quasiment identique pour les trois maillages. Comme pour les calculs avec  $D = 2N$ , la bande est encore fine pour le maillage avec 3568 éléments. Cependant, elle est suffisamment grande pour les autres maillages.



**FIGURE 4.22** – Courbes de chargement et bandes de localisation pour 3 calculs effectués avec les trois maillages  $D=8 N$ . Pour chaque calcul, nous montrons la bande à un moment où sa largeur est la plus petite

Enfin nous avons étudié la réponse pour  $D = 8N$  et  $D = 16N$  (figures 4.22 et 4.23). Les largeurs de bandes sont de plus en plus proches au fur et à mesure que  $D$  augmente pour les trois maillages. Nous notons de ce fait un rapprochement des courbes de contraintes au niveau post pic. Les calculs avec les maillages non structurés ne convergent pas aussi bien que les calculs avec le maillage régulier. La figure 4.23 montre que le calcul avec un maillage de 3568 s'arrête peu après le pic, cependant nous n'avons pas poussé d'avantage les investigations pour comprendre les raisons exactes du problème de convergence. Il est cependant connu que plus la forme d'un élément s'éloigne du carré plus les risques

de problème de convergence sont forts. Le maillage irrégulier est susceptible d'influencer l'orientation de la bande en raison de l'orientation des éléments, il semble qu'il en soit de même pour la largeur de bande, dans des proportions toutefois limitées. Pour le calcul avec le maillage à 2820 élément (figure 4.23), l'aspect de la bande n'est pas nette car, du fait de son élargissement par l'augmentation de  $D$ , elle se propage dans une zone à cheval sur la partie raffinée du maillage et la partie grossière du maillage. Le maillage non régulier a été utilisé afin de gagner du temps de calcul. Néanmoins les problèmes mentionnés précédemment font que nous avons choisi pour la suite du travail, en particulier pour les études de sensibilité qui nécessitent une bonne précision, d'utiliser le maillage régulier.



**FIGURE 4.23** – Courbes de chargement et bandes de localisation pour 3 calculs effectués avec les trois maillages  $D=16 N$ . Pour les calculs avec les maillage de 7200 et 2820 éléments, nous montrons la bande qui correspond au minimum de la largeur. En ce qui concerne le calcul avec 3568 éléments nous montrons la bande au dernier pas de temps

Ci-dessous, nous reportons l'évolution du minimum de la largeur de la bande<sup>1</sup> en fonction de la  $\sqrt{D}$  pour les trois maillages. Dans leurs travaux, Chambon et al. [23], ont montré que pour un problème à une dimension il existe d'un point de vue théorique une relation linéaire entre la racine du paramètre second gradient et la largeur de la

1. La largeur de la bande évolue sensiblement durant le chargement. Afin de donner une valeur objective, nous présentons la valeur de la largeur de bande au moment où elle est la plus petite.

bande, c'est également vrai dans le cas général [16]. Nous avons tracé la courbe ci-dessous afin de savoir si cette relation est vérifiée sur les calculs numériques et par ailleurs pour déterminer la valeur minimale de  $D$  en-dessous de laquelle il n'y a plus objectivité du calcul (pour les maillages choisis).

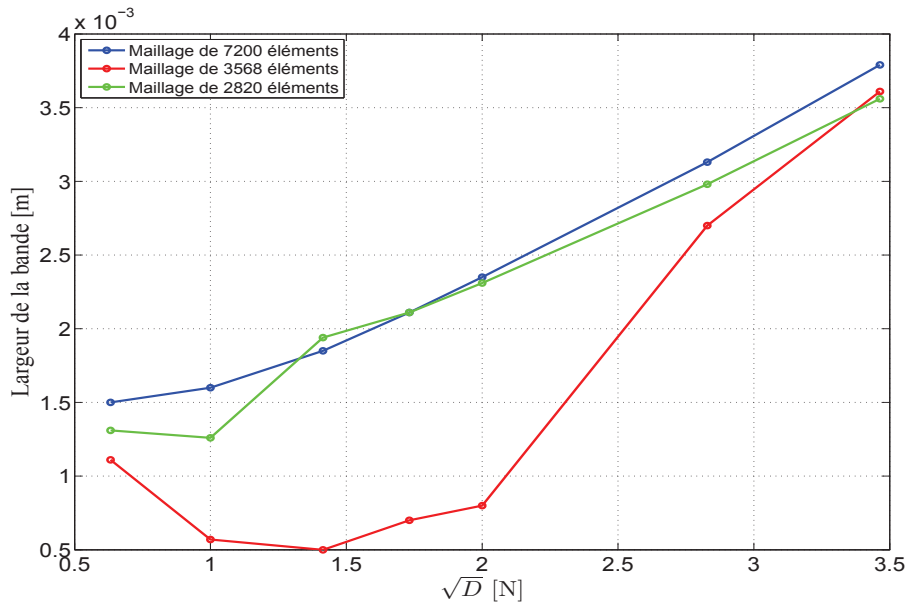
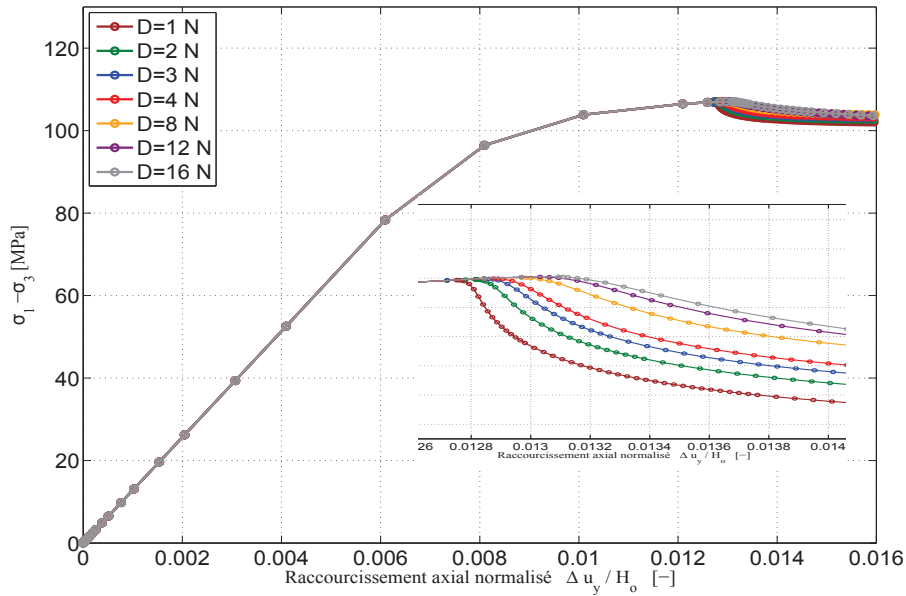


FIGURE 4.24 – Largeurs de bande en fonction de  $\sqrt{D}$  pour les trois maillages utilisés

La figure 4.24 montre que l'évolution du minimum de la largeur de bande en fonction de  $\sqrt{D}$ , pour le maillage régulier de 7200 éléments, et le maillage de 2820 éléments est quasi linéaire, pour des valeurs de  $D$  supérieures à 2 N. Nous retrouvons donc pour ces calculs les résultats théoriques, bien que les résultats concernent les bandes naissantes, alors qu'ici nous sommes en régime localisé avancé. Pour les valeurs de  $D \leq 1N$  la bande est traversée par moins de 3 élément, nous rencontrons alors, bien évidemment, des problèmes de dépendance au maillage. Pour cette raison nous avons choisi de réduire la taille des éléments. Les prochains calculs seront effectués avec un maillage de 16200 éléments.

### 4.2.3 Maillage de 16200 éléments

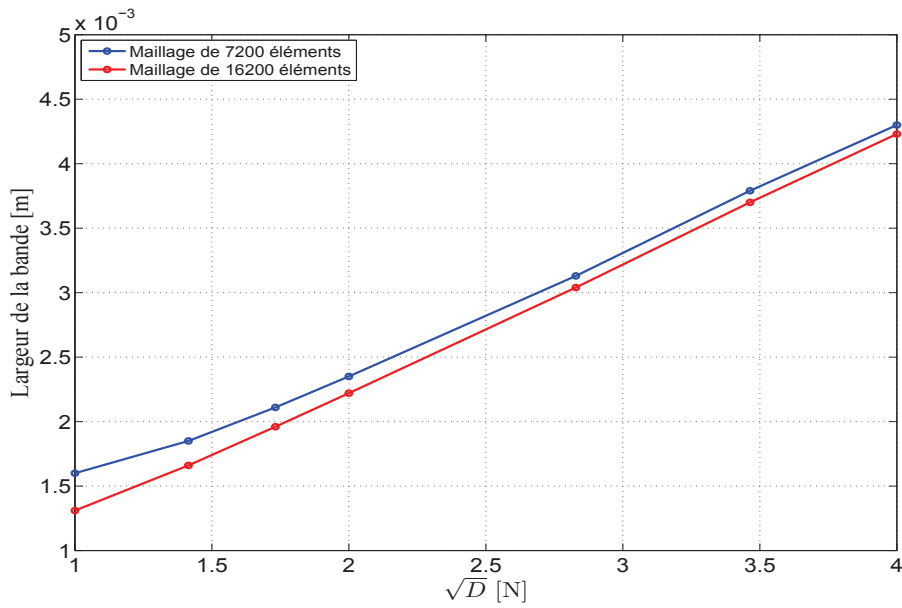
Nous présentons dans cette section les résultats des calculs effectués avec un maillage régulier de 16200 éléments et différentes valeurs de  $D$ . Nous utilisons les paramètres constitutifs du tableau 4.3.



**FIGURE 4.25** – Calcul avec un maillage de 16200 éléments et plusieurs valeurs du paramètre second gradient  $D$

La figure 4.25 montre la réponse des échantillons numériques pour différentes valeurs de  $D$ . Le pic de contrainte est toujours le même malgré la variation de  $D$ . La réponse post-pic est influencée par la modification de  $D$ . Plus la valeur de  $D$  est importante plus la largeur de la bande augmente et donc la pente de la réponse post-pic devient moins forte dans le régime adoucissant. En effet, tendanciellement, plus la largeur de la bande est importante plus la réponse hétérogène se rapproche de la réponse homogène. Le palier de contrainte est peu influencé par les variations de la largeur de bandes. Ces courbes montrent que plus nous augmentons la valeur de  $D$  plus l'initiation de la localisation est retardée. Ceci s'explique par des effets d'échelle [16] et [15]. En effet, quand la localisation est théoriquement possible (critère de bifurcation satisfait pour la première fois), la bande a une largeur infinie, qui devient finie et diminue par la suite. Dans la pratique, pour un calcul numérique, la localisation n'est possible que lorsque la bande a une dimension inférieure à la taille du problème considéré. De fait, plus  $D$  est grand, moins la largeur caractéristique diminue rapidement et plus la localisation est retardée.

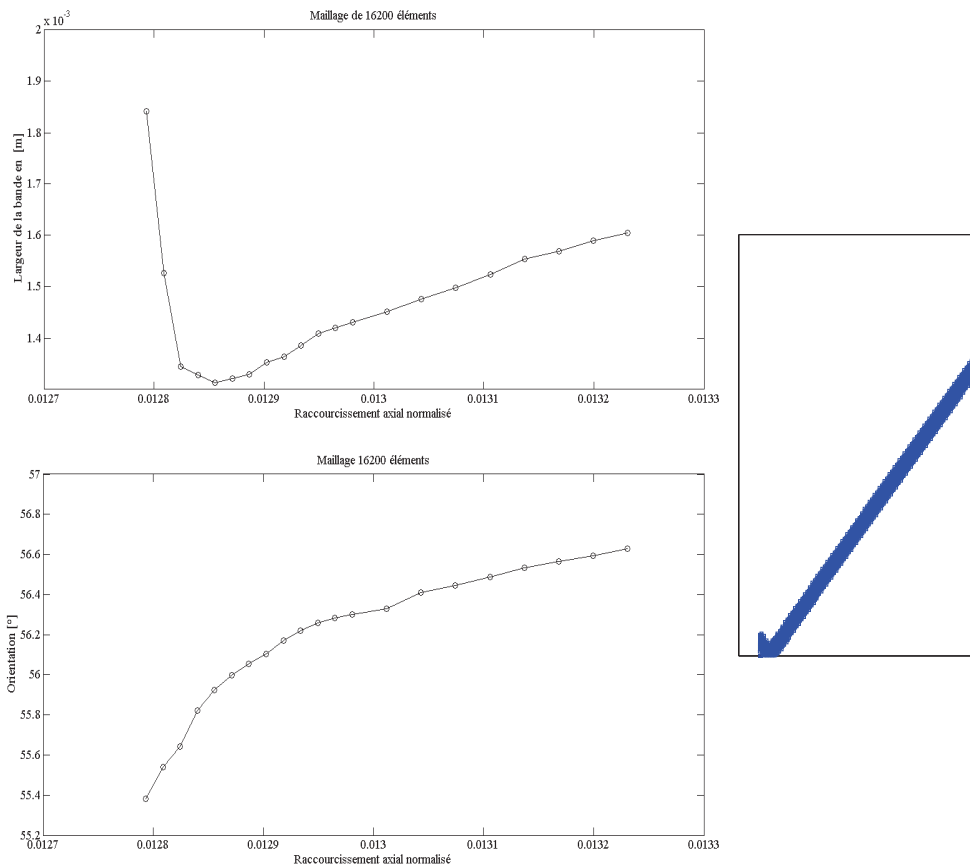




**FIGURE 4.26** – Comparaison des largeurs de bandes pour les maillages à 7200 et 16200 éléments

La figure 4.26 montre que les minimums de largeur de bande sont presque les mêmes pour les deux maillages réguliers, les deux courbes sont quasi linéaires et divergent pour  $D = 1$ . Ceci confirme l'idée qu'il fallait augmenter le nombre d'éléments pour avoir une largeur de bande de l'ordre de 1 mm et un calcul objectif. Il est difficile de savoir à l'avance quel maillage permet d'avoir une largeur de bande donnée, tout en s'assurant que le calcul reste objectif. La seule manière de faire à notre connaissance est de vérifier que le nombre d'éléments dans la bande est supérieur ou égal à trois éléments, et utiliser plusieurs valeurs de  $D$  jusqu'à l'obtention de la largeur de bande souhaitée.

La largeur de la bande que nous obtenons avec le maillage de 16200 éléments et une valeur de  $D = 1N$  est de 1.3 mm. Pour pouvoir avoir une bande encore plus fine il serait nécessaire d'utiliser un maillage plus fin et une valeur de  $D$  plus faible. Cependant en raison de la durée des calculs, nous nous limiterons à ce maillage. Ci-dessous la courbe de variation de largeur de la bande et d'orientation de la bande au cours du chargement pour ce maillage.



**FIGURE 4.27** – Évolution de la largeur de la bande et de l’orientation pour un calcul avec 16200 éléments et  $D = 1N$

La figure 4.27, montre l’évolution de la largeur de la bande ainsi que de son orientation en fonction du raccourcissement axial normalisé pour un calcul avec  $D = 1N$ . La largeur de la bande n’est pas constante, malgré l’utilisation d’un milieu second gradient et l’utilisation d’un paramètre second gradient constant. La largeur de la bande varie car elle ne dépend pas seulement du paramètre second gradient mais aussi du déterminant du tenseur acoustique. Dans leurs travaux, Bésuelle et al. [16] ont montré à travers l’étude de bifurcation pour un milieu enrichi, que la largeur de la bande dépend du paramètre second gradient divisé par l’opposé du déterminant du tenseur acoustique. Le déterminant du tenseur acoustique a priori négatif augmente jusqu’à atteindre un minimum, puis il augmente. La largeur de la bande est d’abord infinie, puis elle décroît jusqu’à atteindre un minimum, et ensuite elle se met à grossir jusqu’à la fin du calcul<sup>2</sup>. Dans tout ce que nous avons présenté et ce que nous allons présenter dans la suite nous prenons en compte le minimum des valeurs de la largeur de bande, pour évaluer

2. Dans cette logique, pour garder une épaisseur de bande constante, il faudrait modifier la loi second gradient en ayant un paramètre  $D$  variable et influencé par le déterminant du tenseur acoustique

l'influence des paramètres sur la largeur de la bande.

### 4.3 Choix des conditions aux limites

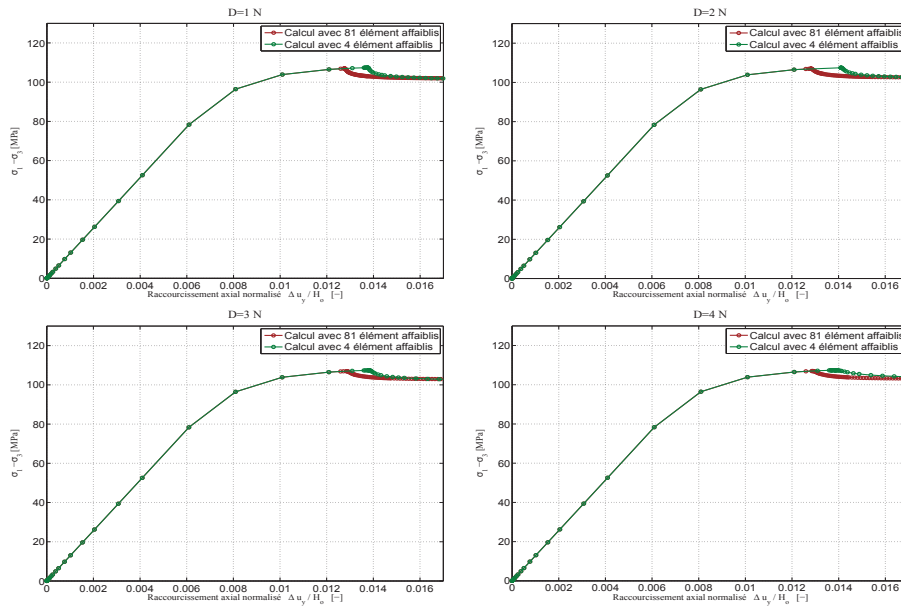
Une réflexion a été menée sur la définition des conditions aux limites et conditions initiales. Ces conditions initiales concernent l'utilisation ou non d'une zone affaiblie, ainsi que pour les conditions aux limites de l'utilisation d'un frétage éventuel.

Afin de connaître l'impact de l'utilisation d'une zone affaiblie sur les calculs nous avons effectué deux types de calculs. Pour le premier type, nous avons regardé l'effet de la taille de la zone affaiblie (81 et 4 éléments). En ce qui concerne le deuxième type de calculs nous n'utilisons pas d'éléments affaiblis, nous faisons un tirage aléatoire du champ de vitesse initiale au début d'un des pas de temps de calcul.

Nous savons que les essais expérimentaux présentent inévitablement du frottement aux extrémités malgré l'utilisation de lubrifiant. Nous effectuons des calculs en imposant un frétage pour étudier son l'impact sur la réponse mécanique.

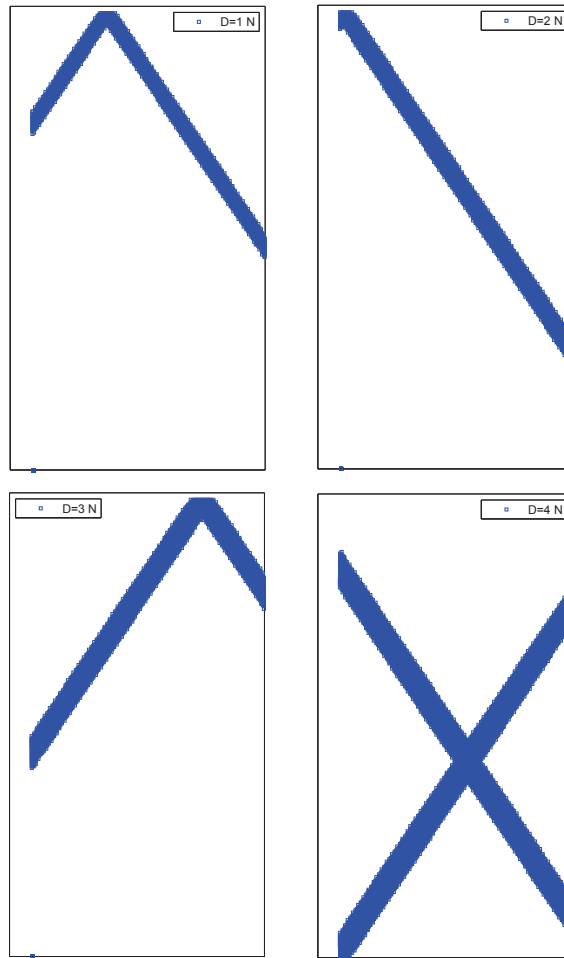
#### 4.3.1 Utilisation d'une zone affaiblie

Au cours du calcul de la compression biaxiale d'un échantillon homogène, si le critère de bifurcation de Rice [84] est satisfait, la solution homogène et des solutions localisées peuvent exister. Pour garantir l'obtention d'une solution localisée et pour reproduire la même solution avec la même structure de bande (une seule bande, située au même endroit). Nous utilisons une zone affaiblie caractérisée par une réduction de 5% de la cohésion initiale. Nous étudions ici l'influence de la taille de cette zone sur le calcul.



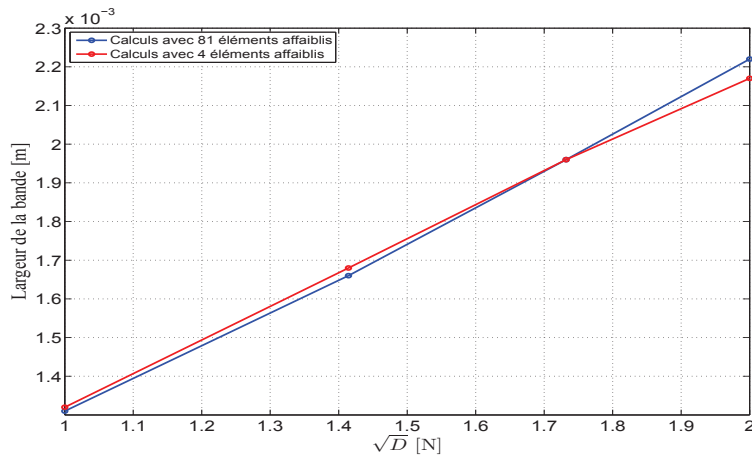
**FIGURE 4.28** – Évolution de la contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé pour différentes valeurs de  $D$ . Comparaison entre les calculs avec 4 et 81 éléments affaiblis

Les résultats ci-dessus (figure 4.28) montrent que le nombre d'éléments affaiblis influence peu le pic de contrainte. Cependant la localisation survient plus tôt pour les calculs avec 81 éléments affaiblis, comparés aux calculs avec seulement 4 éléments affaiblis. En effet nous constatons à partir de la figure 4.29 que les bandes de localisation ne passent pas obligatoirement par la zone affaiblie définie par 4 éléments. La localisation est déclenchée plus tôt pour les calculs avec 81 éléments affaiblis. Pour ces calculs l'état initial de contrainte est hétérogène et susceptible de présenter de la localisation plus tôt que le calcul avec 4 éléments affaiblis qui se rapproche d'un calcul avec un état de contrainte initialement homogène.



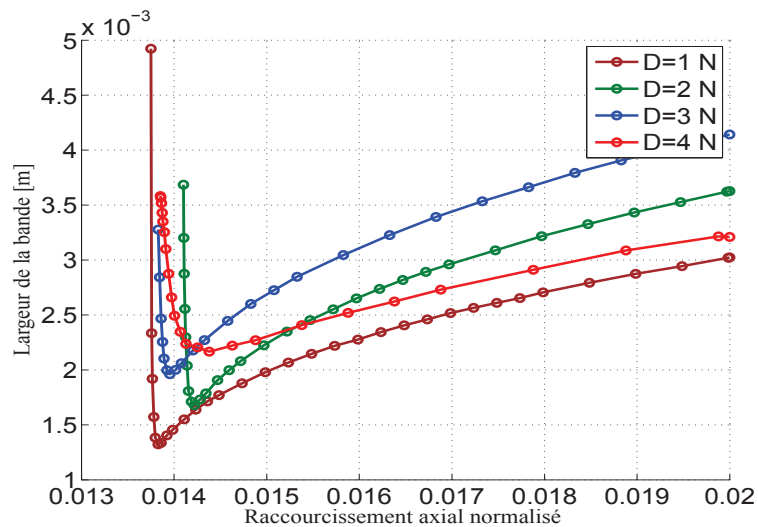
**FIGURE 4.29** – Structures des bandes de localisation de la déformation correspondant aux calculs avec 4 éléments affaiblis et différentes valeurs de  $D$

La comparaison entre les largeurs de bandes pour les calculs avec 4 éléments affaiblis et ceux avec 81 éléments affaiblis est présentée sur la figure 4.30. Clairement, la largeur de la bande est la même quelle que soit le nombre d'éléments utilisés dans la zone affaiblie. La largeur de la bande est contrôlée uniquement par le paramètre second gradient. Nous rappelons que les largeurs de bande prises en compte sont les largeurs minimum obtenues au cours du chargement.



**FIGURE 4.30** – Comparaison entre les largeurs de la bande, pour les calculs avec 4 et 81 éléments affaiblis, pour différentes valeurs de  $D$

Les courbes ci-dessous (figure 4.31) montrent comment les largeurs de bande évoluent pour les calculs effectués avec plusieurs valeurs du paramètre second gradient  $D$ . Ces courbes sont régulières et indiquent que les bandes restent bien définies tout au long du calcul (voir la figure 4.5 pour la signification d'une bande bien définie).



**FIGURE 4.31** – Évolution de la largeur de la bande pour les calculs avec 4 éléments affaiblis et plusieurs valeurs de  $D$

### 4.3.2 Utilisation du frétagé

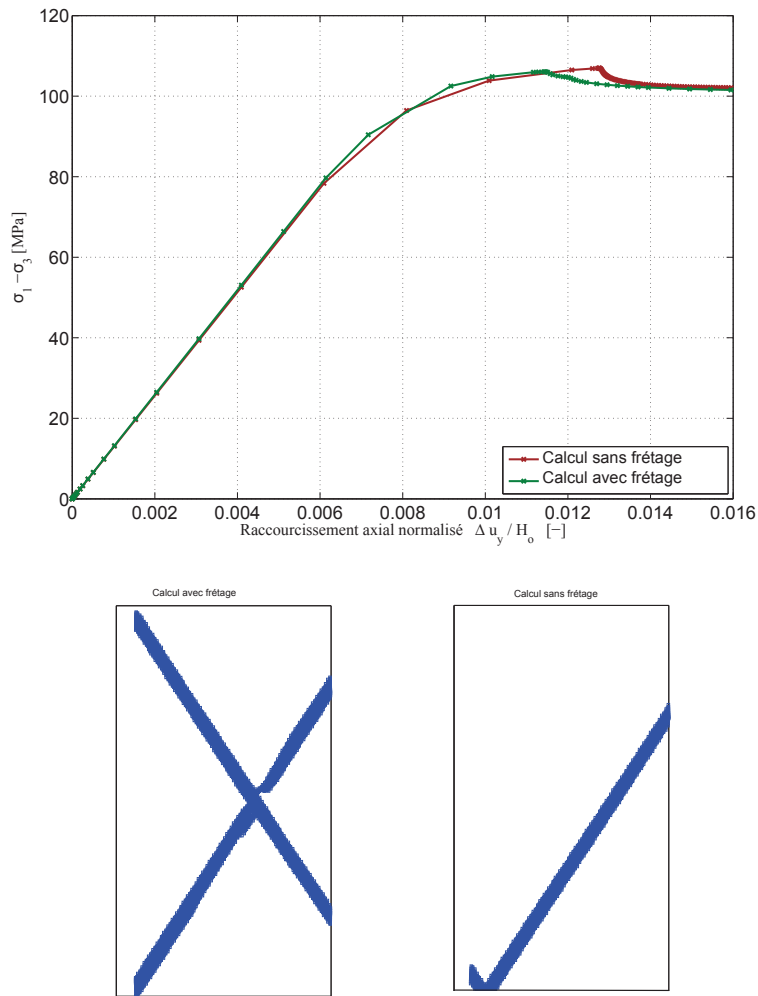
Dans l'objectif de se rapprocher au mieux des conditions aux limites expérimentales, et de quantifier l'influence de celles-ci, nous avons utilisé le frétagé comme condition aux limites du problème. Nous définissons ce frétagé en bloquant les déplacements horizontaux des 4 nœuds aux bords des 4 coins de l'échantillon<sup>3</sup>.

$u_2$	P	E	$\nu$	$c_i$	$c_f$	$\varphi_i$	$\phi_f$	$\beta_c$	$\beta_\varphi$	$\Psi$	D
1 mm	20 MPa	12.2 GPa	0.215	32.5 MPa	12 MPa	4°	21°	0.003	0.001	18°	1 N

**TABLE 4.3** – Paramètres du modèle pour le calcul avec 16200 éléments et du frétagé

La courbe ci-dessous montre les résultats obtenus à partir des simulations avec et sans frétagé. Nous remarquons que le pic et le palier de contrainte ne sont pas influencés par le frétagé. Cependant la solution obtenue pour un calcul avec frétagé est constituée de deux bandes. Afin de savoir si cette structure de bandes est due à l'utilisation de la zone affaiblie, nous avons lancé des calculs avec frétagé mais sans zone affaiblie.

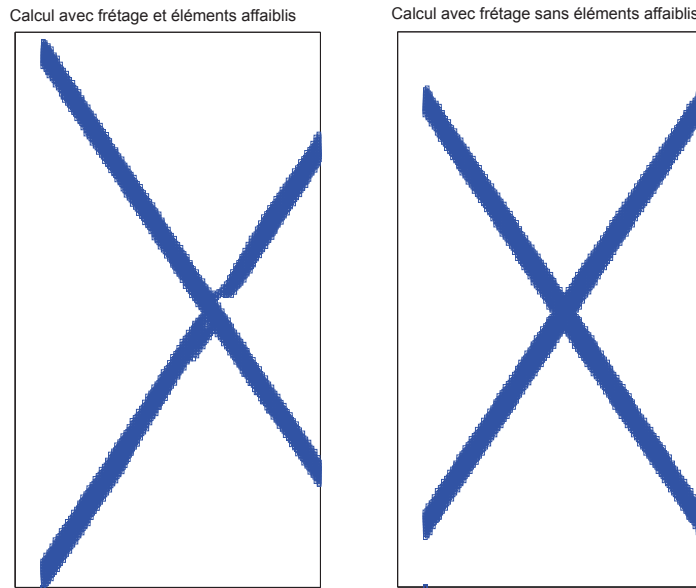
3. bien que nous pensons que les résultats auraient été très proches, une condition de frottement infini aurait consisté à bloquer la composante de déplacement horizontale de tous les nœuds aux extrémités



**FIGURE 4.32** – Comparaison entre les courbes de contraintes des calculs avec et sans frétage. Pour chaque calcul, nous montrons la structure de localisation qui correspond au minimum de la largeur

La figure 4.33 montre que le fait d'utiliser une zone affaiblie n'influence pas particulièrement le nombre de bandes dans le cas des calculs effectués avec frétage. En effet l'utilisation du frétage introduit déjà une hétérogénéité dans les calculs. Cette hétérogénéité est ponctuellement plus forte que celle introduite par la zone affaiblie. Étant donné la faible influence du frétage sur les observables, nous avons décidé de travailler dans la suite du travail sur des conditions aux limites sans frétage.





**FIGURE 4.33** – Comparaison entre les structures de localisation pour deux calculs effectués avec et sans zone affaiblie. Nous imposons un frétage pour les deux calculs. Pour chaque calcul, nous montrons la structure de localisation qui correspond au minimum de la largeur

### 4.3.3 Utilisation de tirages aléatoires

Si un problème aux limites théorique présente une infinité de solutions, la méthode des éléments finis conduit à un nombre de solutions fini. Cependant, il n'est pas aisé de les obtenir ni même d'en obtenir plusieurs. Afin d'avoir plusieurs solutions numériques, Crochepeyre et al. [25], pour les milieux classiques puis, Bésuelle et al. [15] et Sieffert et al. [90] ont montré que l'utilisation d'un champ de vitesse aléatoire dans la résolution de l'algorithme de Newton-Raphson, permettait de faire émerger plusieurs solutions. Classiquement, les vitesses au début du pas de temps sont choisies égales aux vitesses en fin du pas précédent. Ce choix conduit dans la plupart des cas à une solution homogène. En imposant une initialisation aléatoire des vitesses il est possible d'obtenir des solutions hétérogènes. Cet algorithme a été implémenté dans le code de calcul aux éléments finis Lagamine [26]. Nous avons utilisé cet algorithme pour obtenir plusieurs solutions localisées. Les paramètres choisis pour ces calculs (tableau 4.4) sont les paramètres de référence utilisés pour l'étude de sensibilité que nous verrons au prochain chapitre.

$u_2$	P	E	$\nu$	$c_i$	$c_f$	$\varphi_i$	$\varphi_f$	$\beta_c$	$\beta_\varphi$	$\Psi$	D
1 mm	20 MPa	12.2 GPa	0.215	32.5 MPa	9.6 MPa	4°	21°	0.03	0.00666	18°	1 N

TABLE 4.4 – Paramètres du modèle pour le calcul avec 16200 éléments et un tirage aléatoire

Afin de procéder à un tirage aléatoire nous n'utilisons pas d'élément affaibli. A deux ou trois pas après que le critère de bifurcation soit satisfait, nous effectuons le tirage aléatoire. Ce dernier n'est pas réalisé immédiatement au moment où le critère est satisfait car, rappelons le, la largeur de la bande est alors infinie ([16]).

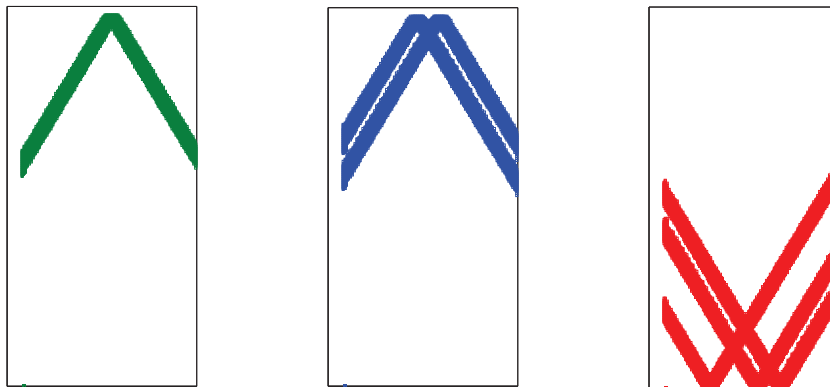
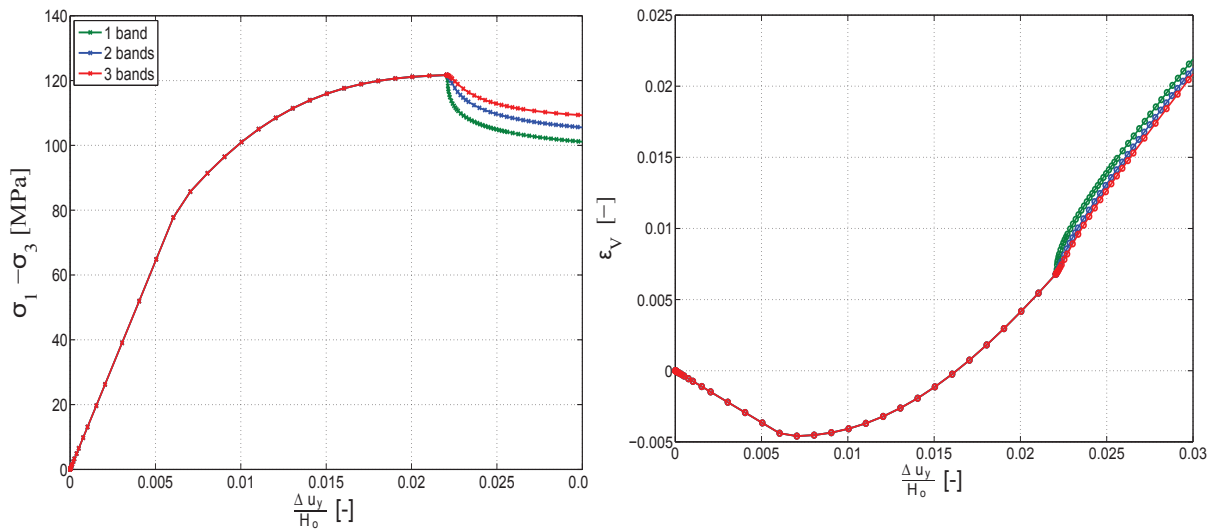


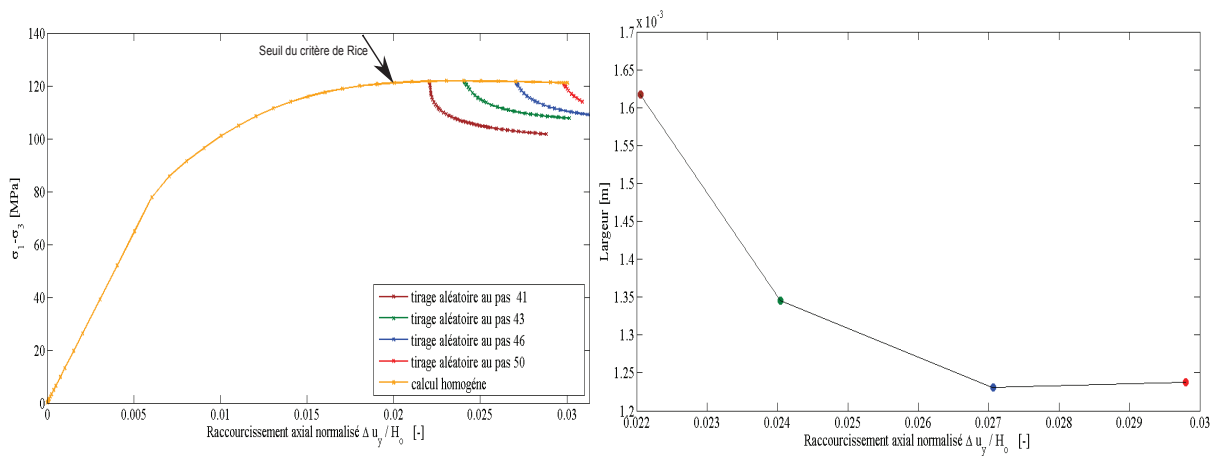
FIGURE 4.34 – Les différentes structures de bandes obtenus par le tirage aléatoire

Le tirage aléatoire nous a permis d'obtenir plusieurs structures de bandes. Nous présentons ici uniquement les résultats de trois de ces structures, chacune ayant un nombre de bandes différent, mais des orientations et épaisseurs identiques. La figure 4.35 montre la dépendance du palier vis-à-vis du nombre de bandes. Plus le nombre de bandes augmente, plus le palier de contrainte est élevé. Ceci a été observé par Bésuelle et al. dans leurs travaux [16]. Plus le nombre de bandes augmente, plus il y a des points de Gauss en charge plastique, plus donc les courbes se rapprochent de la réponse homogène. Par contre nous observons que le nombre de bandes n'a que peu d'influence sur la déformation volumique globale de l'échantillon.



**FIGURE 4.35** – Comparaison de la réponse mécanique pour les calculs sans éléments affaiblis avec tirage aléatoire

Dans un second temps, nous avons effectué le tirage aléatoire pour différents pas. Afin de comparer les largeurs de bande obtenues à chaque pas. La figure 4.36 montre que la largeur de la bande décroît jusqu'au pas 46, puis elle réaugmente légèrement. Nous retrouvons la même tendance que la courbe d'évolution de la largeur de bande des calculs avec une zone affaiblie (figure 4.27).



**FIGURE 4.36** – Comparaison de la réponse mécanique et des largeurs de bande (nous prenons le minimum de la largeur) pour les calculs sans élément affaibli avec des tirages aléatoires effectués à différents niveaux de raccourcissement

## 4.4 Convergence du calcul

Nous avons rencontré des difficultés liées à la convergence du calcul, au moment de la localisation. Ces difficultés sont dues d'une part à la localisation de la déformation dans une bande assez fine. Puis, d'autre part au phénomène de snapback qui survient quand l'adoucissement est très important. Nous présentons dans cette section les méthodes utilisées afin de résoudre ces problèmes de convergence.

### 4.4.1 Technique d'intégration par sous pas

Nous utiliserons une intégration par sous-intervalles qui permet d'avoir un compromis entre les requêtes d'économie et de précision ([27], [20]). Le paramètre  $\alpha_N$  permet de calculer le nombre de sous-intervalles par pas de temps, ce paramètre est à définir par l'utilisateur. Nous avons effectué plusieurs calculs afin de choisir la valeur  $\alpha_N$  qui convenait le mieux.

Afin de procéder à une intégration par sous-intervalles, chaque pas est divisé en plusieurs sous-intervalles. On intègre ensuite numériquement la loi constitutive sous-intervalle après sous-intervalle. La longueur d'un sous-intervalle  $\delta t$  est définie par :

$$\delta t = \frac{\Delta t}{NINTV} \quad (4.2)$$

où  $\Delta t$  est l'incrément du pas de temps et  $NINTV$  le nombre de sous-intervalles. Le choix de ce nombre reste toujours un problème à étudier. Il peut être constant au cours de toute l'histoire du chargement et dans tout le domaine étudié comme c'est le cas pour la plupart des lois constitutives dans Lagamine. Mais Wang [101] dans ses travaux de thèse a proposé de faire varier ce paramètre dans le temps et dans l'espace. En ce qui concerne les problèmes avec localisation de la déformation, cette variation aide la convergence du calcul. En effet, en régime de post-localisation les déformations se concentrent fortement dans les bandes de cisaillement. La non-linéarité du chemin de contrainte augmente dans ces zones. Il devient d'une part difficile à suivre, et d'autre part nécessite une précision supérieure puisque ce sont les zones qui nous intéressent le plus.

Le nombre de sous-intervalles est calculé en chaque incrément de chargement et en chaque point d'intégration par une équation qui fait intervenir l'incrément de déformation. Ce nombre est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$NINTV = 1 + \frac{\dot{\varepsilon}_N \Delta t}{\alpha_N} \quad (4.3)$$

avec :

$$\dot{\varepsilon}_N = \sqrt{\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_y^2 + \dot{\varepsilon}_{xy}^2} \quad (4.4)$$

où  $\alpha_N$  est une constante choisie a priori et qui correspond à une taille de sous intervalles. L'équation (4.3) montre que  $NINTV$  varie linéairement en fonction de  $\Delta\varepsilon_N = \dot{\varepsilon}_N\Delta t$ , qui représente un incrément de la déformation équivalente. Ainsi le nombre de sous-intervalles sera plus important au moment et à l'endroit où l'incrément de déformation sera le plus important comme, par exemple, au moment de la localisation de la déformation en bandes de cisaillement.

Le paramètre  $\alpha_N$  introduit permet d'avoir une valeur raisonnable du nombre de sous-intervalles. Cependant son choix reste arbitraire et dépend de l'expertise numérique de l'utilisateur. En ce sens le nombre de sous-intervalles peut être trop grand ou trop petit si une mauvaise valeur de  $\alpha_N$  est utilisée. Pour éviter la première situation, une limite de ce nombre doit être utilisée. Il est donc possible de fixer le nombre maximal de sous-intervalles. L'équation suivante remplace l'équation (4.3) :

$$NINTV = \min\left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}_N\Delta t}{\alpha_N}, \max NINTV\right) \quad (4.5)$$

$\max NINTV$  et  $\alpha_N$  valent par défaut dans Lagamine 100 et  $1 \times 10^{-4}$  respectivement. Les valeurs initialement définies dans Lagamine ne permettaient pas aux calculs avec 7200 éléments de converger. En effet le nombre de sous-intervalles obtenu par le calcul était supérieur à 100. Ceci n'est pas suffisant pour obtenir la convergence du premier pas localisé. Nous avons donc étudié l'influence du paramètre  $\alpha_N$  sur la convergence et le temps de calcul (tableau 4.5). Tous ces calculs ont été effectués sur la même machine en utilisant les mêmes paramètres constitutifs.

Étant donné qu'au cours du calcul il est possible de connaître la valeur de  $\max NINTV$ , il est facile de la définir. Nous avons retenue le valeur de 1500 pour  $\max NINTV$ , et la valeur de  $1 \times 10^{-5}$  pour  $\alpha_N$ .

$\alpha_N$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$
Temps de calculs	Plus de 4 jours	Plus de 4 jours	Plus de 4 jours	23 heures	Plus de 4 jours

**TABLE 4.5** – Durée des calculs pour un maillage de 7200 éléments et différentes valeurs de  $\alpha_N$

A l'issue de ces calculs, nous avons donc retenue la valeur de  $1 \times 10^{-5}$  pour  $\alpha_N$ . En ce qui concerne les calculs avec 16200, nous avons estimé qu'il était nécessaire d'augmenter le nombre de sous-intervalles maximal en raison de la finesse de la largeur de bande. Nous l'avons fixé à 4000 au lieu de 1500 pour les calculs avec 7200 éléments. La valeur de  $\alpha_N$  n'a pas été modifié et nous l'avons laissé à  $1 \times 10^{-5}$ .

#### 4.4.2 Problèmes de convergence liés au snapback

Le snapback est un phénomène qui peut être observé si le comportement du matériau est relativement fragile (fort radoucissement), ou si la taille de la zone de localisation est très faible par rapport à la taille de la structure. Afin de comprendre ce phénomène, nous considérons une barre unidimensionnelle soumise à une traction et se déformant de façon uniaxiale. Cette barre présente une localisation de la déformation.

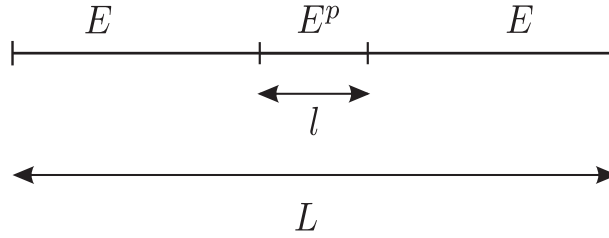


FIGURE 4.37 – Localisation de la déformation dans une barre 1D

On désigne par  $i$  les variables à l'intérieur de la bande. Les variables à l'extérieur de la bande sont notées par  $e$ .  $E$  représente le module de l'élasticité à l'extérieur de la bande et  $E^p$  le module d'élasticité à l'intérieur de la bande. A l'équilibre on peut écrire :

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon^e E = \Delta\varepsilon^i E^p \\ \Delta\varepsilon^e < 0 \quad \Delta\varepsilon^i > 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Après quelques développements, l'incrément de déplacement s'écrit sous la forme :

$$\Delta u = \Delta\varepsilon^e \left[ \frac{(L-l)E^p + lE}{E^p} \right] \quad (4.7)$$

L'incrément de force s'écrit :

$$\Delta F = E\Delta\varepsilon^e \quad (4.8)$$

Nous remarquons de l'équation (4.7), que si la largeur de la bande est très petite l'incrément de déplacement s'écrit :

$$\Delta u \simeq L\Delta\varepsilon^e \quad (4.9)$$

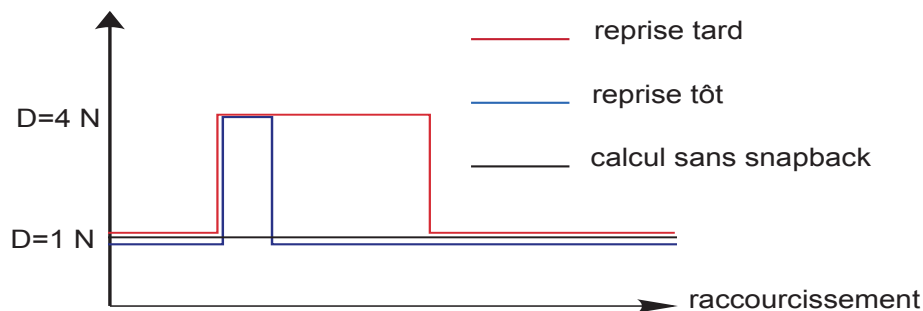
Puisque  $\Delta\varepsilon^e < 0$  on en déduit que  $\Delta u < 0$ . De ce fait :

$$\Delta F < 0 \Rightarrow \Delta u < 0 \quad (4.10)$$

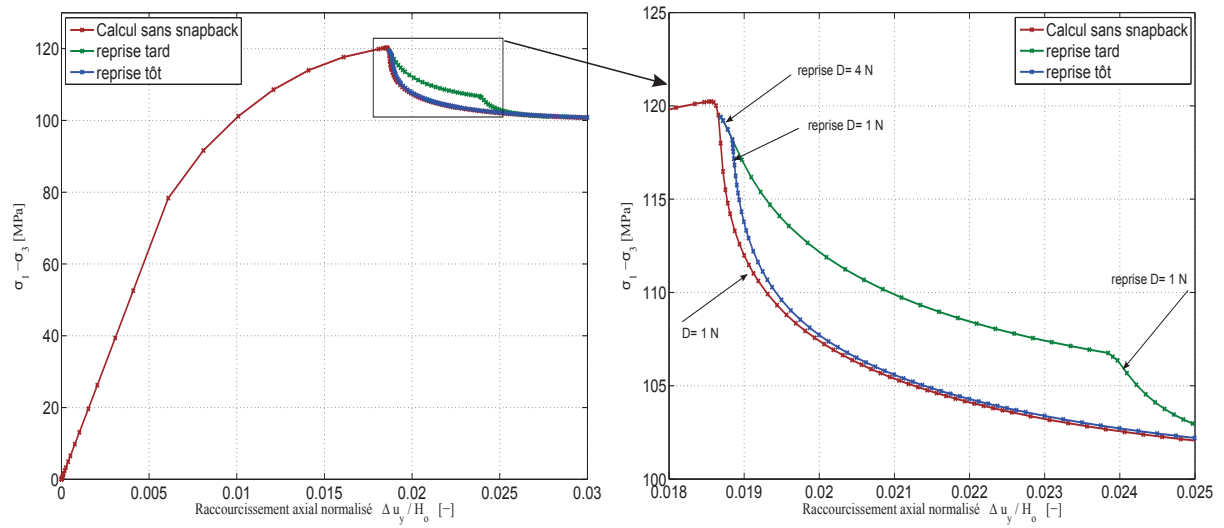
L'équation (4.10) résume le phénomène du snapback. En effet, si la force diminue, ce qui est le cas au moment de l'adoucissement, le déplacement n'augmente pas mais diminue. Le snapback induit dans la plupart des cas des problèmes de convergence pour

un calcul numérique contrôlé en déplacement. Il se peut que le calcul converge vers une solution, néanmoins cette solution ne peut être considérée avec confiance comme un état possible accessible par la structure, à partir du moment où le chemin d'équilibre n'a pas été suivi. Il est donc nécessaire d'utiliser d'autres méthodes de pilotage, comme les méthodes de longueur d'arc ([102], [85], [30]).

Il n'y a pas de méthodes testées et fiables à notre connaissance dans le code de calcul Lagamine qui permet de résoudre les problèmes du snapback. Nous avons donc utilisé une méthode rudimentaire simple qui permet de dépasser le snapback, et de poursuivre le calcul après cette phase de snapback, afin d'explorer la suite de la réponse, en particulier le palier de contrainte. Pour éviter la non convergence d'un calcul dû au phénomène de snapback, nous décidons de modifier temporairement la valeur  $D$  dans la zone où la vitesse de l'adoucissement est la plus forte. Ainsi, nous pouvons contrôler la pente post localisé de la courbe de chargement et éviter le phénomène de snapback. La méthode de calcul consiste à faire une reprise du calcul à partir du moment où nous rencontrons un problème de convergence à cause du snapback. En faisant cette reprise nous utilisons une valeur du paramètre second gradient  $D$  supérieure à la valeur initiale, on diminue de ce fait considérablement l'adoucissement en augmentant la largeur de la bande. Puis une fois que le calcul converge nous faisons une deuxième reprise, en revenant cette fois à la valeur initiale de  $D$ . Une question se pose alors sur le niveau de raccourcissement où effectuer la seconde reprise de calcul avec la valeur initiale de  $D$ . Afin de répondre à cette question et de tester la méthode, nous l'avons appliquée à un calcul qui ne présente initialement pas de snapback. Nous avons ensuite comparé les largeurs de bandes, les courbes de contrainte et de déformation volumique globale. Nous allons donc comparer les calculs sans snapback avec deux autres calculs. Le premier où la reprise avec la valeur de  $D$  initiale et faite tôt au niveau du raccourcissement, et un deuxième calcul où cette reprise est faite plus tard (figure 4.38).

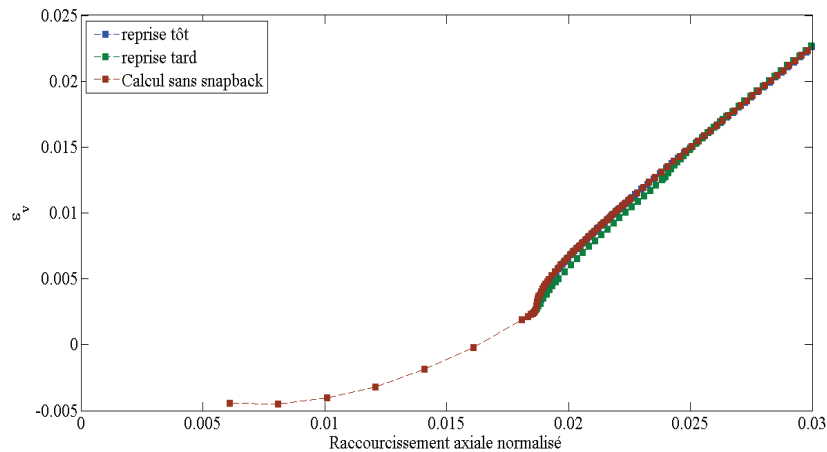


**FIGURE 4.38** – Schéma d'évolution du paramètre  $D$  expliquant la définition des reprises tôt et tard



**FIGURE 4.39** – Évolution de la contrainte déviatorique pour les calculs avec reprise de calculs afin de tester la méthode de résolution du snapback

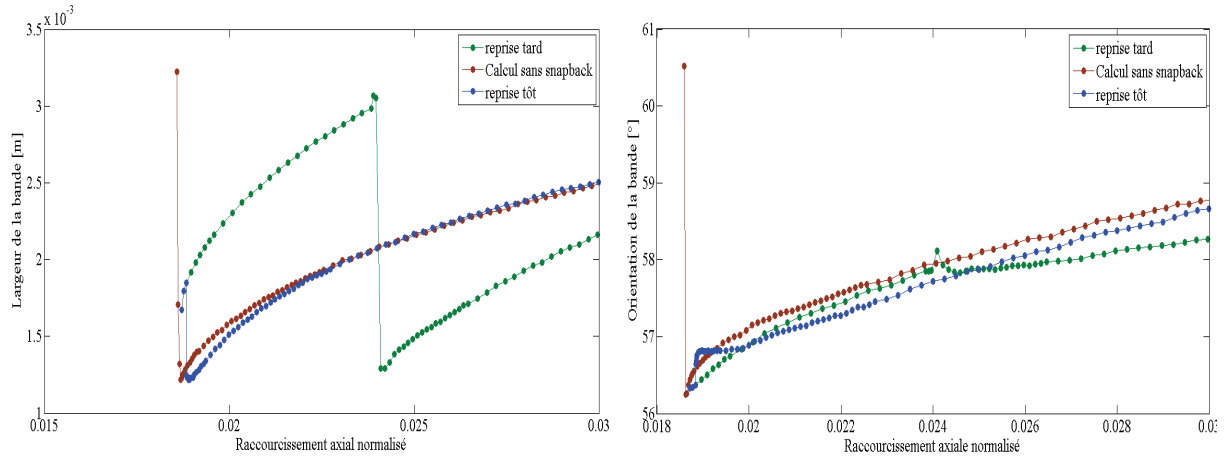
Nous avons tracé (figure 4.39) l'évolution de la contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé pour trois calculs. Le premier calcul ne présente pas de snapback et la valeur de  $D$  utilisée est de  $1N$ . Nous effectuons une reprise de ce calcul quelques pas après le pic (le snapback se présente souvent à ce niveau) afin de modifier la valeur de  $D$  à  $4N$ . Puis ce même calcul est repris pour imposer à nouveau  $D = 1N$ . Le troisième calcul suit le même principe que le deuxième, à la différence que la reprise avec  $D = 1N$  est faite plus tôt. Nous avons utilisé les mêmes paramètres (tableau 4.4) pour les trois calculs à l'exception de  $D$ .



**FIGURE 4.40** – Évolution de la déformation volumique globale (partie plastique) pour les calculs avec reprise afin de tester la méthode de résolution du snapback



Les courbes de contrainte (figure 4.39) montrent que le moment de la reprise pour imposer la valeur de  $D$  initiale n'a pas d'effets sur le palier de contrainte, la déformation volumique (figure 4.40) ainsi que l'orientation de la bande (figure 4.41).



**FIGURE 4.41** – Évolution de la largeur et de l'orientation de la bande pour les calculs avec reprise de calculs afin de tester la méthode de résolution du snapback

La comparaison des largeurs de bande pour les trois calculs montre clairement que, afin de retrouver le minimum de la largeur de la bande initiale, il est important de faire la reprise le plus tôt possible. Nous déduisons de ces résultats que la solution proposée pour la résolution du snapback est efficace à condition que la reprise avec la valeur de  $D$  initiale soit faite tôt au niveau du raccourcissement.

## 4.5 Conclusions

Nous avons présenté à travers ce chapitre les outils développés dans le cadre de cette thèse à l'aide du logiciel Matlab. Ces outils permettent de calculer la déformation volumique, la largeur et l'orientation de la bande, ainsi que de connaître la nature de la bande (compactante ou dilatante).

A partir de ces outils nous avons pu choisir le maillage que nous avons jugé approprié pour nos calculs. Nous avons également défini la valeur du paramètre second gradient qui permettait d'obtenir une largeur de bande d'environ 1 mm. Les prochains calculs seront donc effectués avec un maillage de 16200 éléments et une valeur de  $D$  de l'ordre de  $1N$ .

Nous avons effectué plusieurs calculs pour connaître les conditions aux limites à imposer au problème. Nous avons ainsi montré que le fait d'utiliser une zone affaiblie avait un impact uniquement sur l'initiation de la localisation. Quant au frétag, il influence le

seuil de localisation et ne permet pas d'avoir une solution localisée avec uniquement une bande. Pour toutes ces raisons, nous avons choisis d'effectuer les calculs avec une zone affaiblie sans utiliser de frétagé.

Nous avons montré comment surmonter les problèmes de convergence rencontrés à cause du phénomène de snapback et du nombre de sous pas calculés pour l'intégration.

---

### Étude de sensibilité sur le calcul hétérogène

---

Ce chapitre présente la partie la plus importante des travaux de thèse. Il comporte l'étude de sensibilité des observables expérimentaux par rapport aux paramètres de la loi enrichie. L'originalité de ce travail tient au fait que l'étude de sensibilité porte sur la partie hétérogène du calcul. Cette étude de sensibilité n'a de sens que parce que nous avons accès aux observables extraits des essais expérimentaux grâce à l'analyse par corrélation d'images. Cette étude a été menée sur les paramètres suivants : le frottement final, la cohésion finale, la dilatance, le paramètre  $\beta_c$ , le paramètre  $\beta_\varphi$  et le paramètre second gradient  $D$ .

Nous allons montrer dans ce chapitre l'influence qualitative et quantitative de ces paramètres sur les observables numériques suivants : le pic de contrainte, le palier de contrainte, la déformation axiale au pic, la déformation volumique globale, la largeur de la bande ainsi que son orientation. Puisque la largeur et l'orientation évoluent sensiblement pendant le calcul, nous prendrons en compte le minimum de largeur de bande et l'orientation qui correspond à ce minimum. Le palier de contrainte sera défini par la valeur minimale de la contrainte déviatorique après le pic de contrainte.

Nous avons déduit à partir de cette étude de sensibilité, une matrice de sensibilité, qui sera utilisée pour l'optimisation des observables. Nous pouvons ainsi établir des combinaisons de variations de nos paramètres constitutifs permettant de ne faire changer qu'un seul observable à la fois.

## 5.1 Calcul de référence

Nous avons défini précédemment le jeu de paramètres qui sera utilisé pour l'étude de sensibilité. La valeur des paramètres choisis permet d'avoir un faible adoucissement. Ils visent ainsi à éviter d'avoir du snapback au cours du calcul hétérogène. Afin d'obtenir le palier de contrainte, nous avons imposé des déplacements importants (supérieurs à 0.02). Malgré les précautions prises, il y a quelques calculs où nous n'avons pas pu obtenir le palier. Soit un comportement de type snapback a été rencontré, soit le raccourcissement nécessaire pour avoir le palier était trop important.

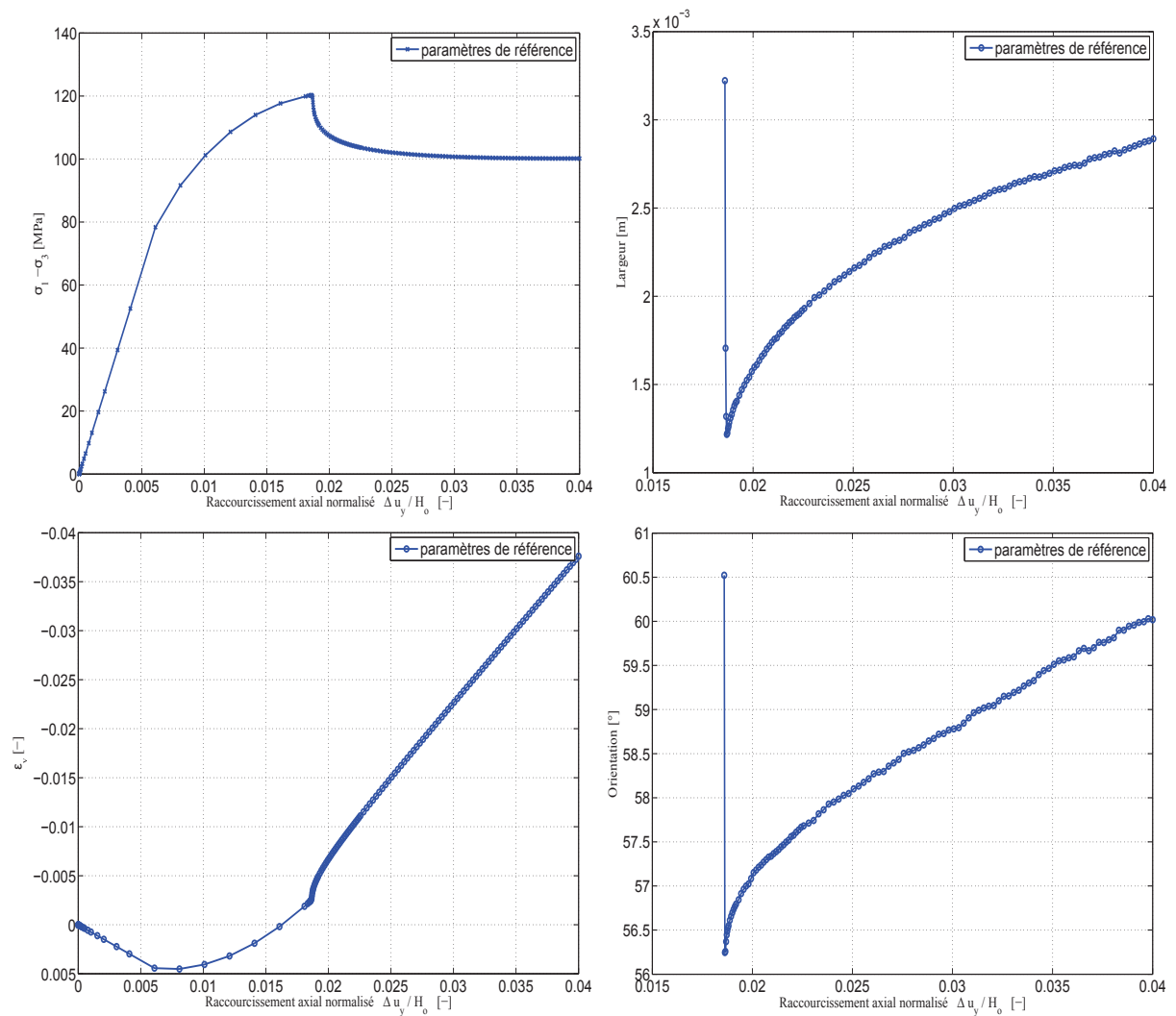
Pour ce qui est du confinement à 20 MPa, chaque paramètre (à l'exception du paramètre second gradient) a été étudié individuellement en modifiant 5 fois la valeur de ce paramètre. Le premier calcul est celui de référence (tableau 5.1), puis deux calculs avec deux valeurs inférieures et deux valeurs supérieures à cette référence. En ce qui concerne l'étude de sensibilité du paramètre second gradient  $D$ , nous ne diminuons ce paramètre qu'une seule fois par rapport à sa valeur de référence. Nous évitons ainsi d'avoir une largeur de bande trop fine qui pourra mettre en cause l'objectivité des calculs. 3 calculs sont donc effectués avec une valeur du paramètre  $D$  plus grande que celle de référence. Au total, nous avons donc réalisé 30 calculs différents.

Pour le confinement de 30 MPa, nous effectuons 3 calculs pour chaque paramètre, dont un avec une valeur inférieure à la valeur de référence, et un autre avec une valeur supérieure. Nous avons donc réalisé 18 calculs différents. Le calcul effectué avec les paramètres de référence est représenté par la courbe bleue dans tout ce qui suivra.

P	E	$\nu$	$c_i$	$c_f$	$\varphi_i$	$\varphi_f$	$\beta_c$	$\beta_\varphi$	$\Psi$	$D$
20 MPa	12.2 GPa	0.215	32.5 MPa	9.6 MPa	4°	21°	0.03	0.006666	18°	1 N

TABLE 5.1 – Paramètres utilisés pour le calcul de référence

Nous présentons ici les résultats du calcul de référence pour les confinements à 20 et 30 MPa. Ces résultats consistent en une courbe de chargement (contrainte déviatorique en fonction du raccourcissement axial normalisé), la courbe de déformation volumique, puis l'évolution de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement. La figure 5.1 montre les résultats obtenus pour le calcul effectué avec les paramètres de référence et un confinement de 20 MPa. Nous notons sur cette courbe que la réponse post pic présente peu d'adoucissement. La largeur de la bande continue d'augmenter et nous pensons que c'est cette augmentation qui induit le changement d'orientation dans la bande. En effet, quand la bande s'élargit certains point de Gauss qui étaient en charge élastique se mettent à charger plastiquement. Nous avons remarqué en observant l'évolution de la bande, que les points qui se mettent à charger plastiquement, ne sont pas symétriques par rapport à la bande initiale. Il se retrouve dans le coté supérieur droit de la bande plus que dans le coté inférieur. Par conséquence la bande change d'orientation. Cette dernière augmente d'un peu moins de 4°.



**FIGURE 5.1** – Résultats du calcul effectué avec les paramètres de référence et un confinement de 20 MPa

En ce qui concerne les résultats du calcul avec les paramètres de référence et un confinement de 30 MPa (figure 5.2), nous pouvons faire les mêmes remarques que celles faites pour le calcul avec 20 MPa de confinement. Nous notons de plus que le pic de contraintes pour ce calcul est supérieur au pic du calcul effectué avec un confinement de 20 MPa. Ceci est normal puisque le matériau est frottant et présente une dépendance par rapport à la pression moyenne. La largeur de la bande et son orientation ne sont pas affectées par le changement de confinement.

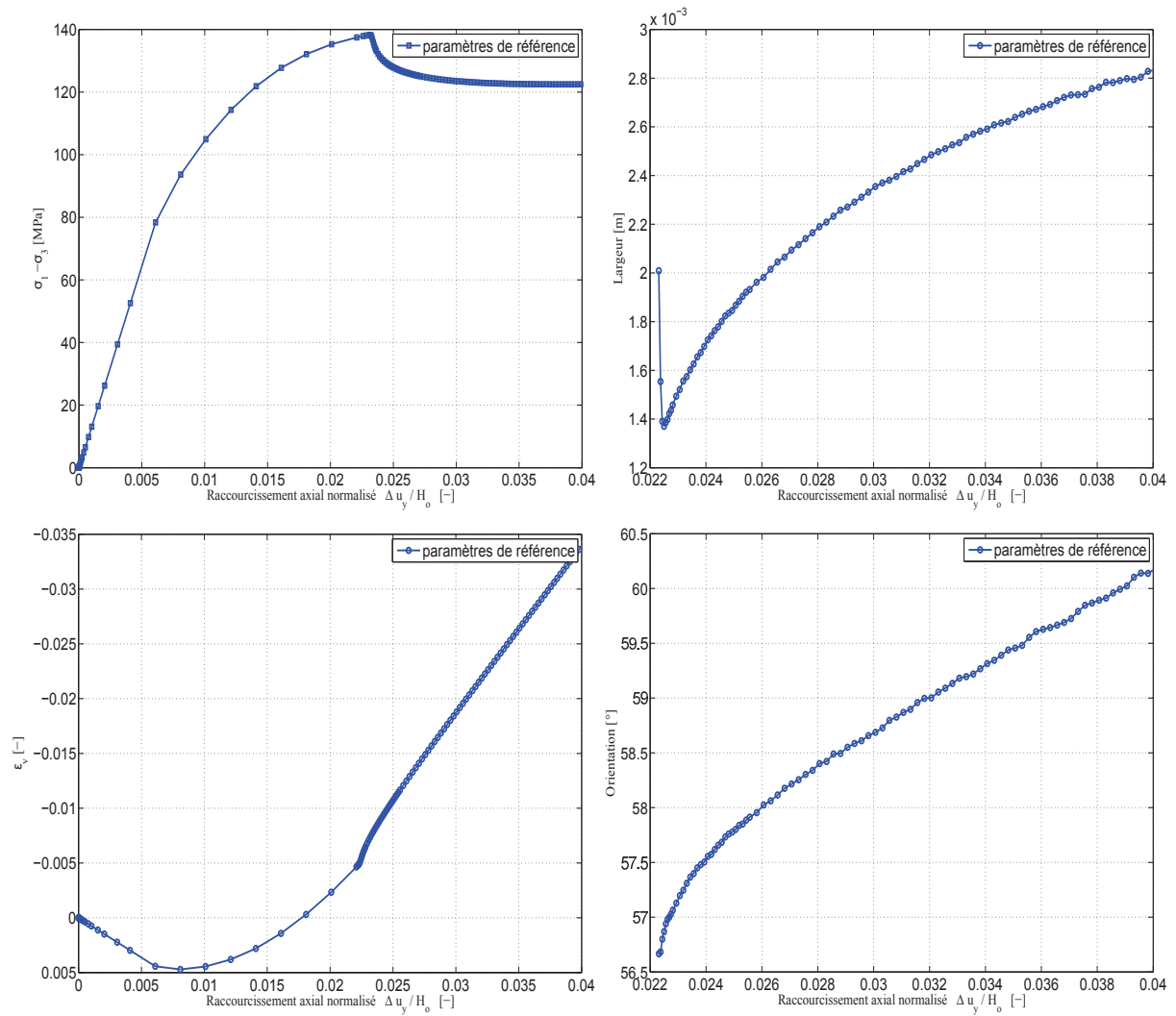


FIGURE 5.2 – Résultats du calcul effectué avec les paramètres de référence et un confinement de 30 MPa

## 5.2 Étude de sensibilité sur la cohésion finale et le paramètre $\beta_c$

Nous présentons ici les résultats de l'étude de sensibilité effectuée sur la cohésion finale ainsi que le paramètre  $\beta_c$ , qui permet de contrôler la variation de la cohésion au cours du chargement. Nous montrons dans ce qui suit l'influence de la variation de ces deux paramètres sur la courbe de contrainte, de déformation volumique ainsi que sur la largeur et l'orientation de la bande.

## 5.2.1 Étude de sensibilité sur la cohésion

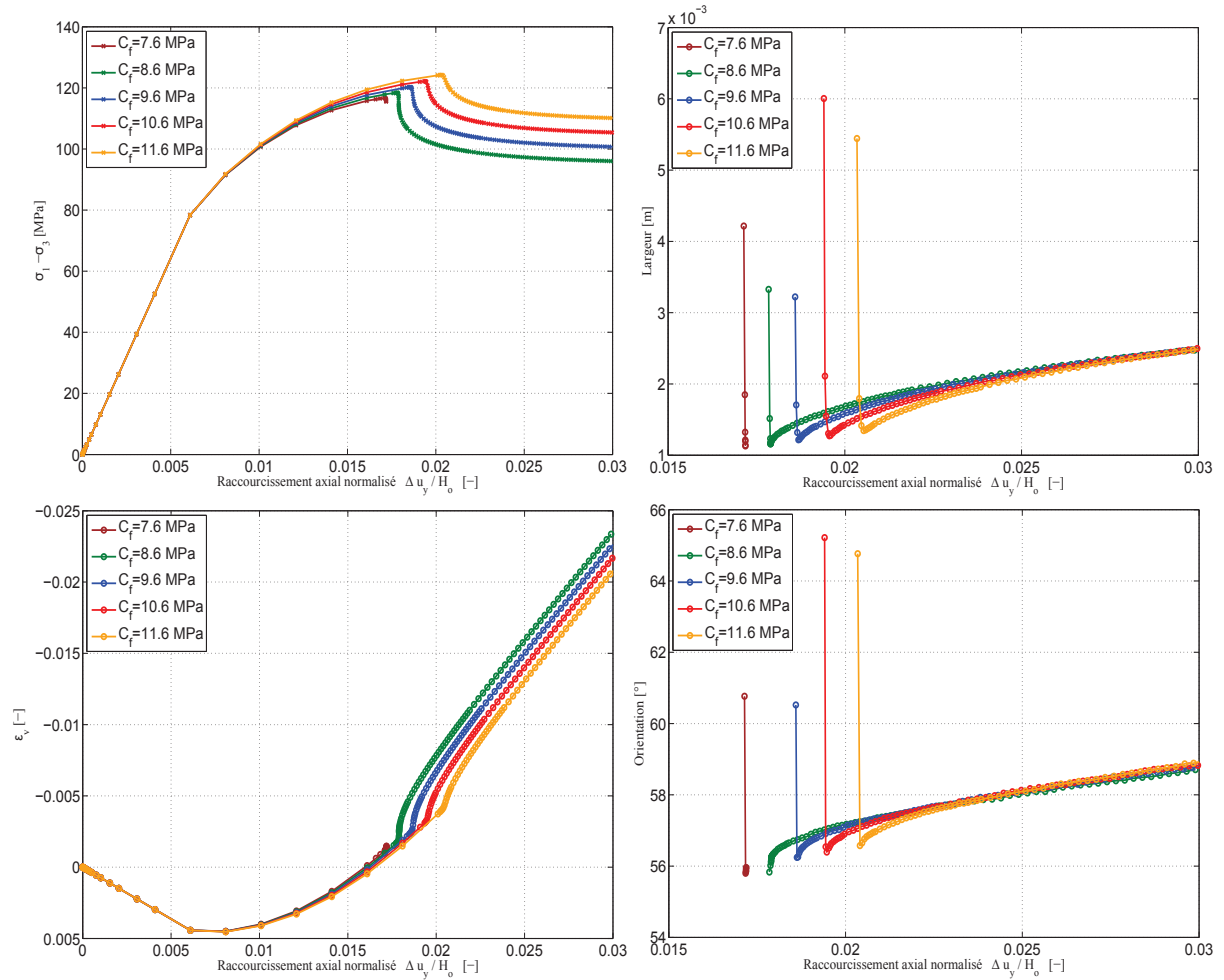


FIGURE 5.3 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $c_f$  pour un confinement de 20 MPa

La figure 5.3 représente le résultat de l'étude de sensibilité sur  $c_f$  pour un confinement de 20 MPa. A partir de la valeur de référence, le paramètre est augmenté puis diminué deux fois de 1 MPa. Nous remarquons sur la courbe de contrainte que plus  $c_f$  diminue plus l'adoucissement est important. Le calcul avec la valeur  $c_f=7.6$  MPa ne converge pas à cause du phénomène de snapback. L'augmentation de  $c_f$  retarde le seuil de localisation, de plus elle fait augmenter le pic et le palier de contrainte. En augmentant la cohésion finale on retarde la dilatance induite par la localisation. Nous avons noté que la largeur de la bande est légèrement sensible à  $c_f$ , en augmentant la cohésion finale on augmente sensiblement la largeur de la bande. En effet, la largeur de la bande ne dépend pas seulement du paramètre second gradient mais aussi du déterminant du tenseur acoustique donc des paramètres de la partie classique de la loi constitutive [16]. Ce dernier dépend en particulier de la pente de la courbe de chargement après

le pic. Cela peut expliquer l'influence de la cohésion finale sur la largeur de la bande. L'orientation de la bande n'a subi aucune modification significative suite à la variation de  $c_f$ .

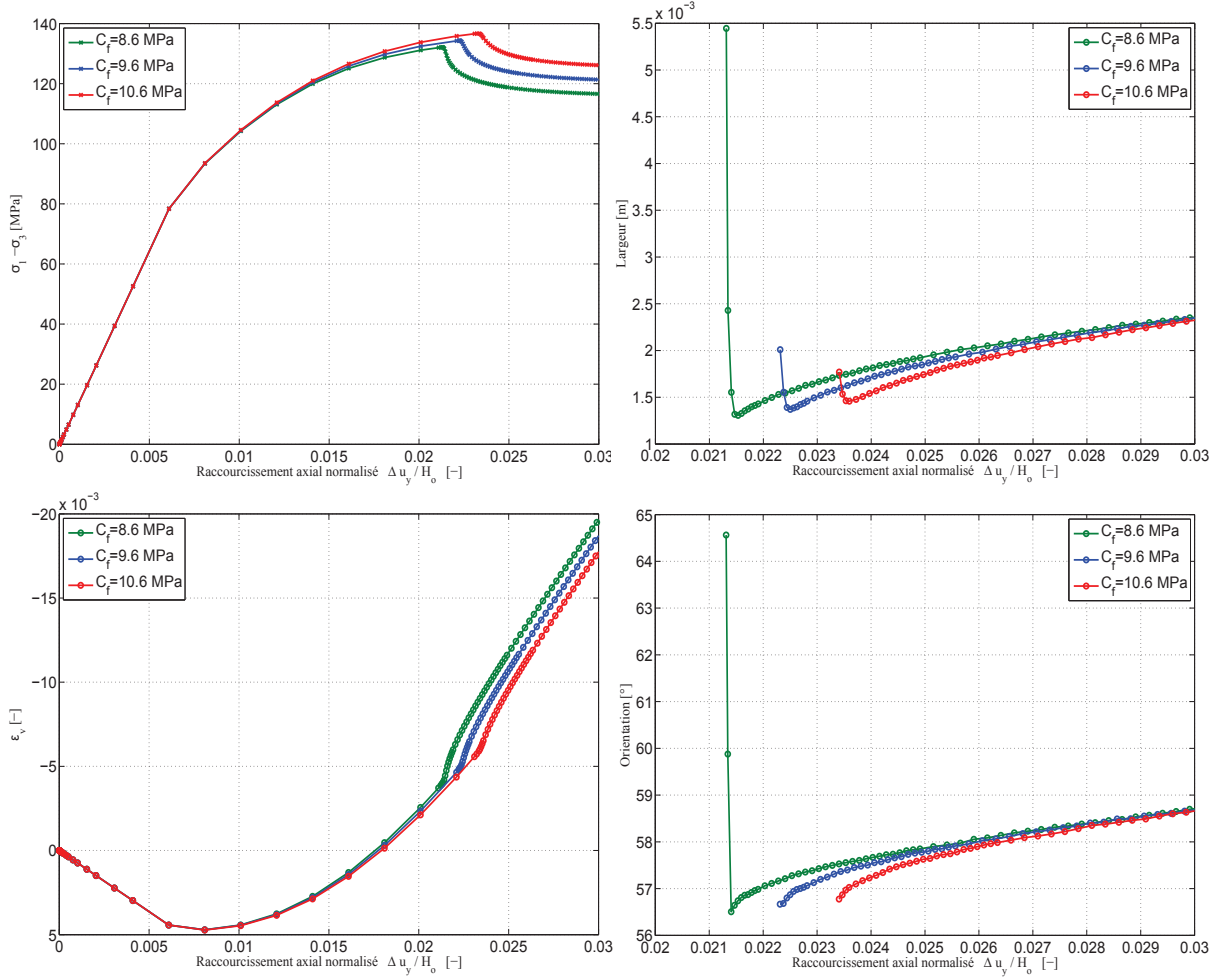


FIGURE 5.4 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $c_f$  pour un confinement de 30 MPa

Pour un confinement de 30 MPa nous observons les mêmes tendances que pour un confinement de 20 MPa. Le fait d'accroître la cohésion finale, retarde l'initiation de la localisation, il augmente le pic et le palier de contrainte. La dilatance est retardée quand  $c_f$  augmente. Néanmoins, la variation de ce paramètre n'a pas d'impact sur l'orientation de la bande et fait varier sensiblement la largeur de la bande.

La figure 5.5 montre l'influence de  $c_f$  sur tous les observables, pour les calculs effectués avec les deux confinements de 20 et 30 MPa. Ceux-ci sont tous sensibles à la variation de la cohésion finale à l'exception de l'orientation de la bande (les variations sont jugées insignifiantes).



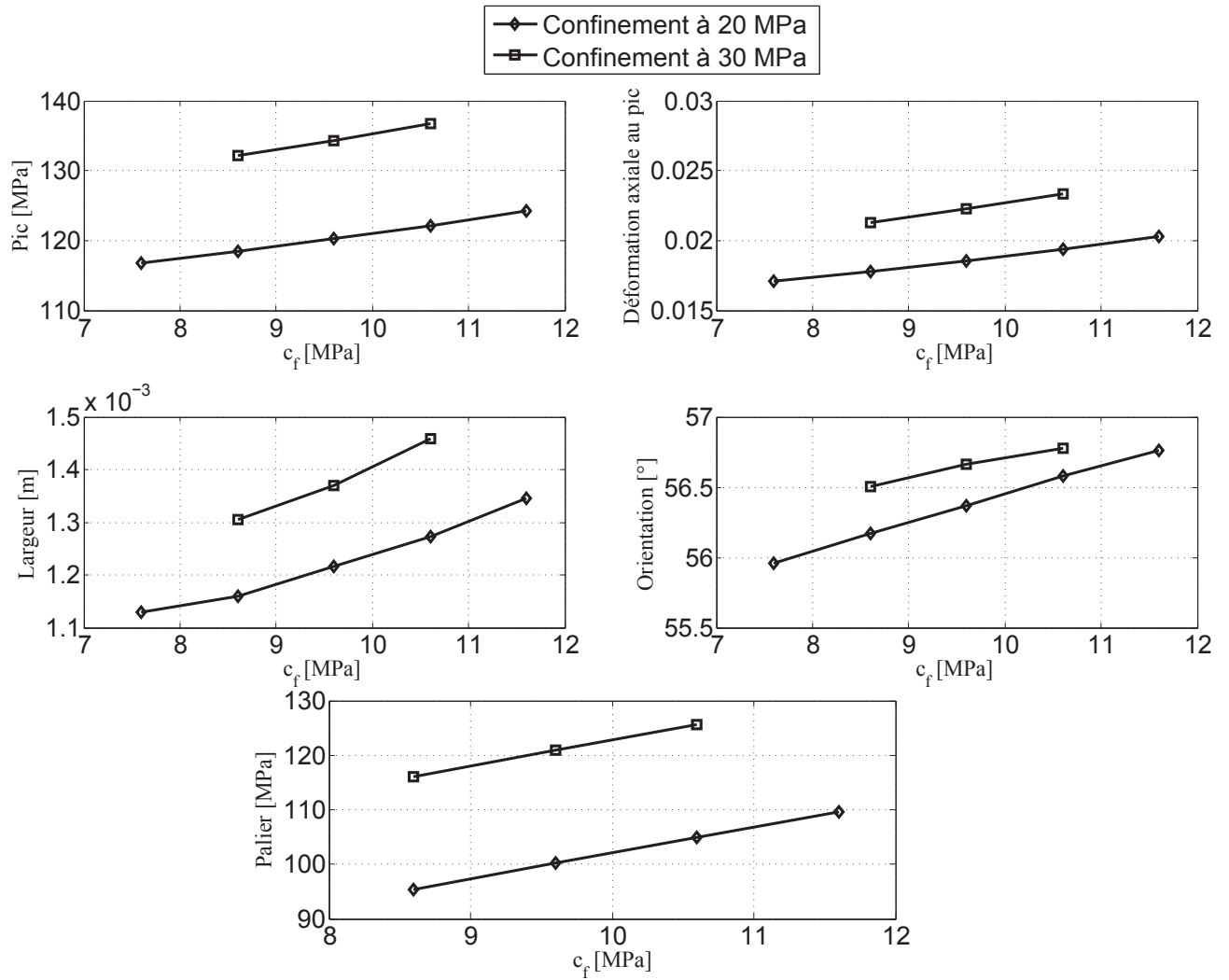


FIGURE 5.5 – Influence de la variation du paramètre  $c_f$  sur les observables pour les confinements de 20 et 30 MPa

### 5.2.2 Étude de sensibilité sur le paramètre $\beta_c$

Afin d'évaluer l'influence du paramètre  $\beta_c$  sur les observables, celui-ci est diminué et augmenté deux fois d'une valeur de 0.005 par rapport à sa valeur de référence. Les résultats de l'étude de sensibilité sur  $\beta_c$  sont montrés sur les figures 5.6 et 5.7.

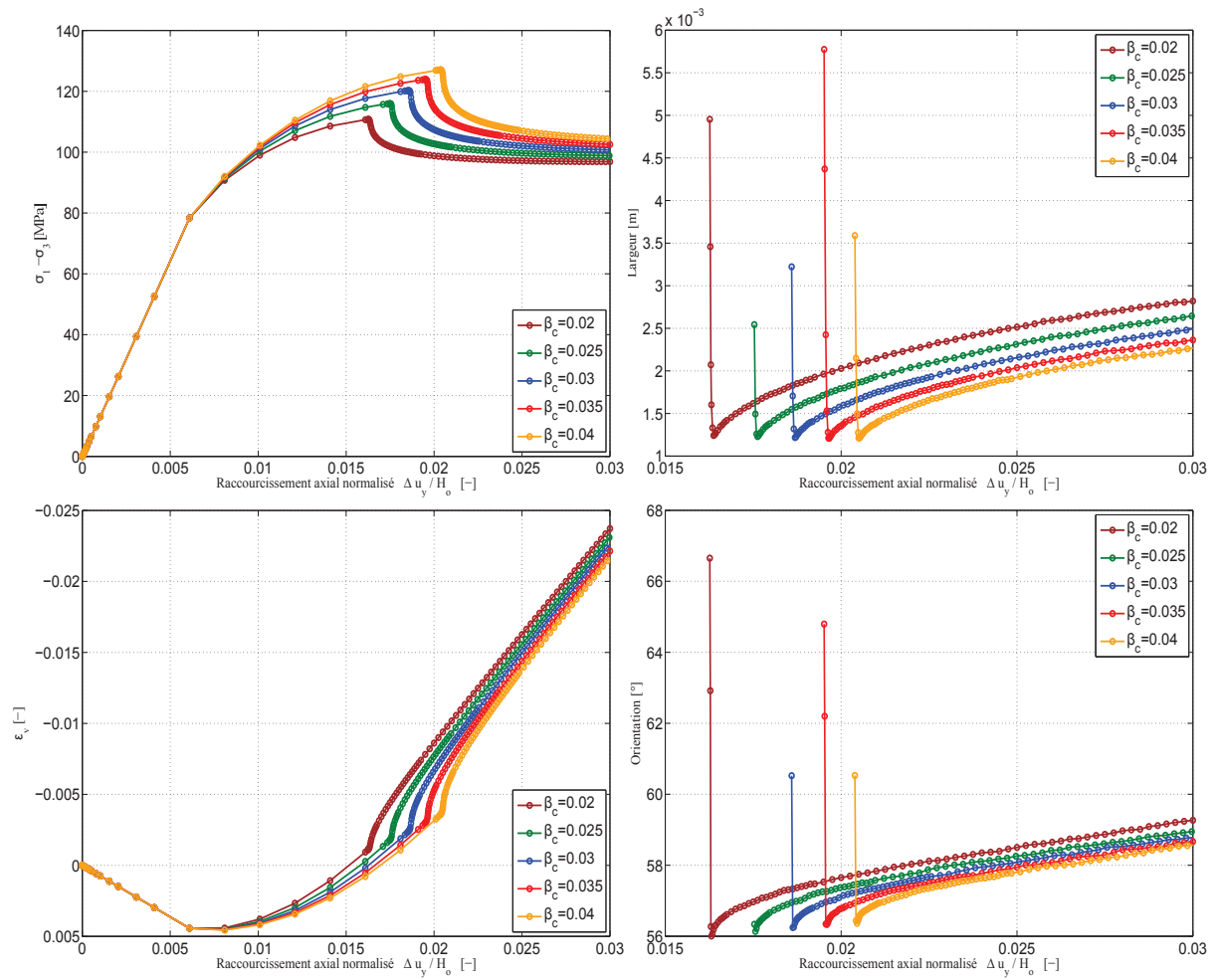


FIGURE 5.6 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $\beta_c$  pour un confinement de 20 MPa

La figure 5.6 montre que l'augmentation de  $\beta_c$  induit une augmentation du pic de contrainte, et a peu d'influence sur le palier de contrainte. Plus  $\beta_c$  est important plus la localisation est retardée. L'accroissement de ce paramètre retarde le régime dilatant sur la courbe de déformation volumique. Étant donné l'influence du paramètre  $\beta_c$  sur la pente de la courbe de chargement après le pic, la largeur de la bande montre une très légère sensibilité vis-à-vis de ce paramètre. En augmentant  $\beta_c$  on diminue légèrement la largeur de la bande. L'influence  $\beta_c$  sur l'orientation de la bande est négligeable.

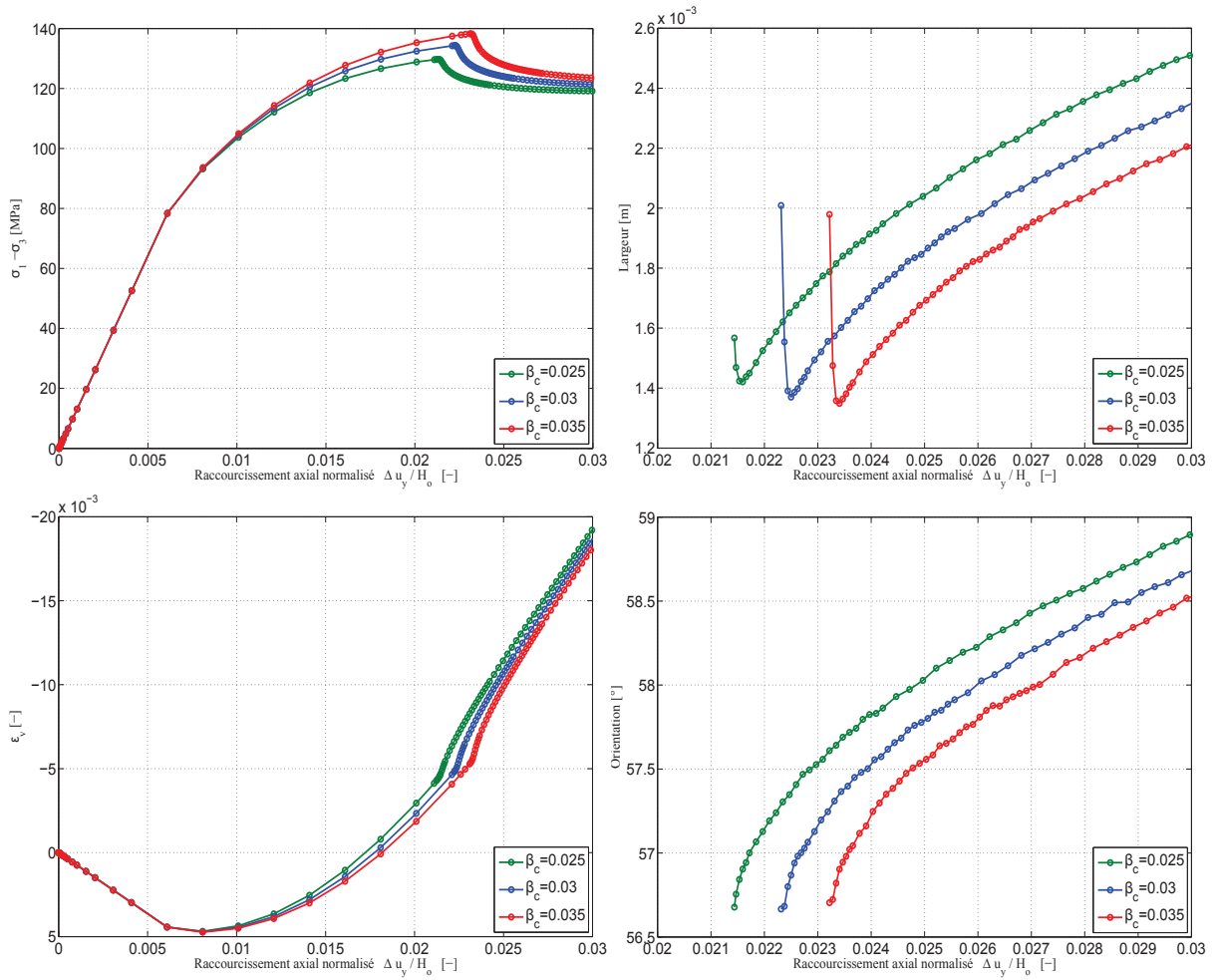


FIGURE 5.7 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $\beta_c$  pour un confinement de 30 MPa

Pour un confinement de 30 MPa (figure 5.7), le pic de contrainte ainsi que la déformation axiale au pic croissent en fonction de  $\beta_c$ . Le palier est peu sensible à la variation de  $\beta_c$ . Nous observons sur les courbes de déformations volumiques que plus la valeur de  $\beta_c$  est importante plus le régime dilatant est retardé. La largeur de la bande baisse sensiblement avec l'augmentation de  $\beta_c$ . L'orientation de la bande n'est pas influencée par ce paramètre.

La figure 5.8 résume les résultats de l'étude de sensibilité sur le paramètre  $\beta_c$  pour les confinements à 20 et 30 MPa, en modifiant ce paramètre nous modifions tous les observables, à l'exception de l'orientation de la bande, ainsi que la largeur (les corrections ne sont pas significatives au regard de l'incertitude et des précisions expérimentales).

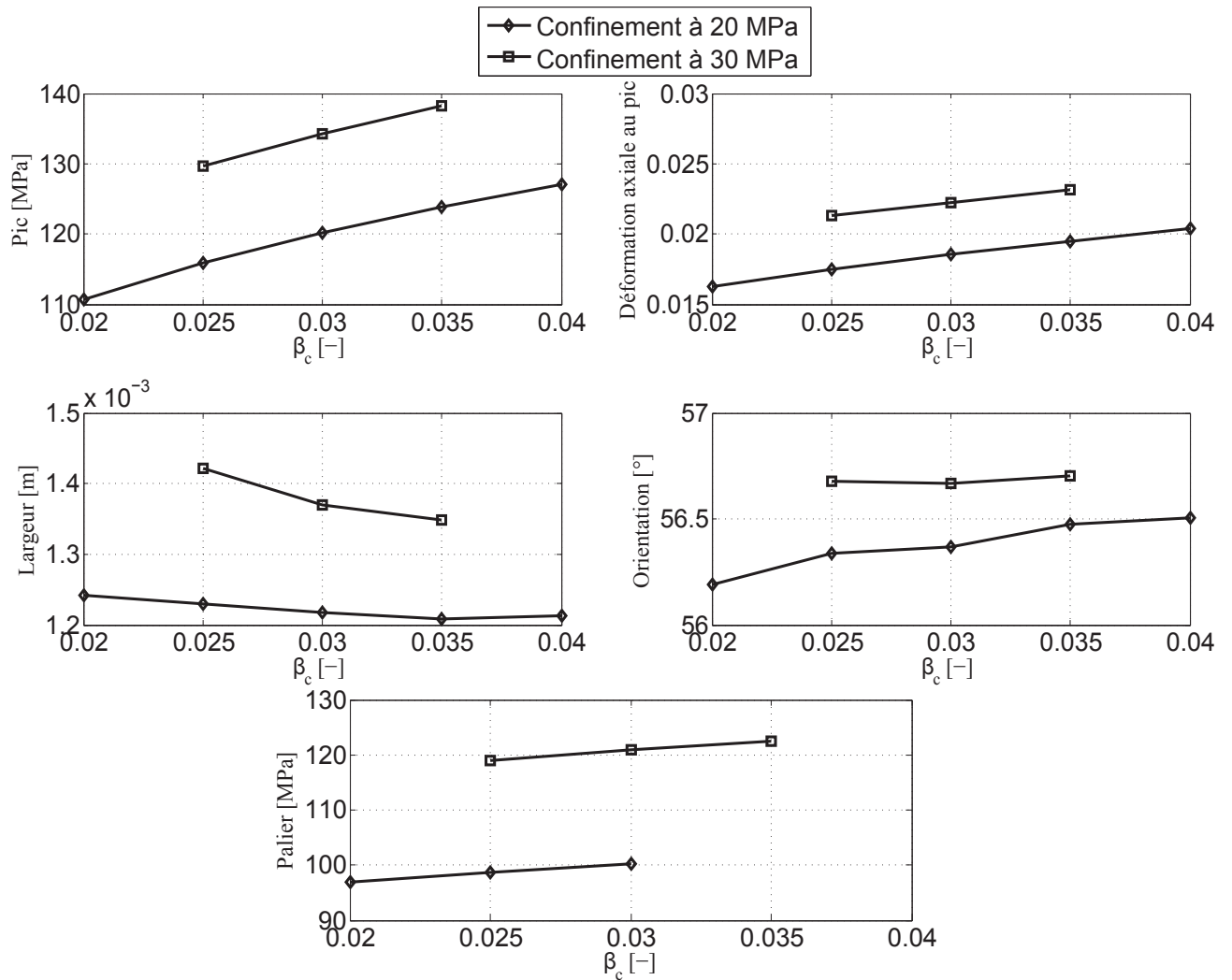


FIGURE 5.8 – Influence de la variation du paramètre  $\beta_c$  sur les observables pour les confinements à 20 et 30 MPa

### 5.3 Étude de sensibilité sur le frottement final et le paramètre $\beta_\varphi$

Nous allons étudier dans cette section l'influence du frottement final ainsi que le paramètre  $\beta_\varphi$  sur les observables, pour les deux confinements de 20 et 30 MPa.

### 5.3.1 Étude de sensibilité sur le frottement final

Afin de savoir comment  $\varphi_f$  influe sur les observables, nous avons fait varier  $\varphi_f$  entre 19 et 23 ° pour un confinement de 20 MPa. La figure 5.9 montre l'impact de la variation du frottement final sur les observables.

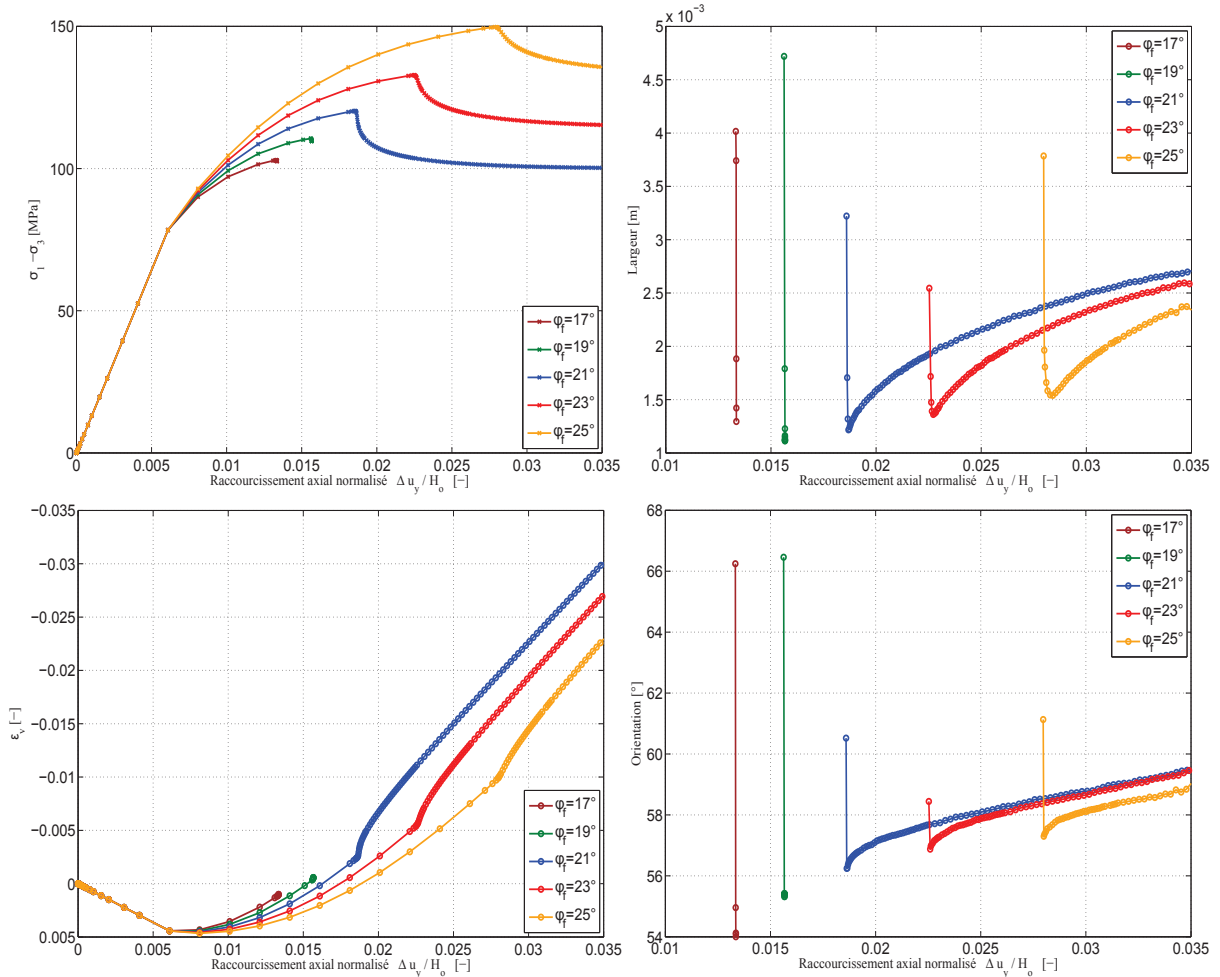


FIGURE 5.9 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $\varphi_f$  pour un confinement de 20 MPa

Nous remarquons pour les calculs effectués avec un confinement de 20 MPa (figure 5.9), que plus  $\varphi_f$  est important plus le durcissement est important. En réduisant  $\varphi_f$  l'adoucissement devient prédominant et la courbe de chargement est de plus en plus raide après le pic. Les calculs avec  $\varphi_f = 17^\circ$  et  $\varphi_f = 19^\circ$  présentent du snapback. Le pic et le palier de contrainte sont très sensibles à la variation du frottement final. Entre le calcul avec  $\varphi_f = 21^\circ$  et le calcul avec  $\varphi_f = 25^\circ$ , le pic et le palier de contrainte, ont respectivement augmenté de 20 et 29 MPa. La déformation axiale au pic augmente sensiblement avec l'augmentation du frottement final, tandis que la dilataance diminue

avant et après la localisation. La largeur de la bande augmente avec l'augmentation de  $\varphi_f$ , mais l'orientation de la bande est légèrement sensible à la variation de  $\varphi_f$ .

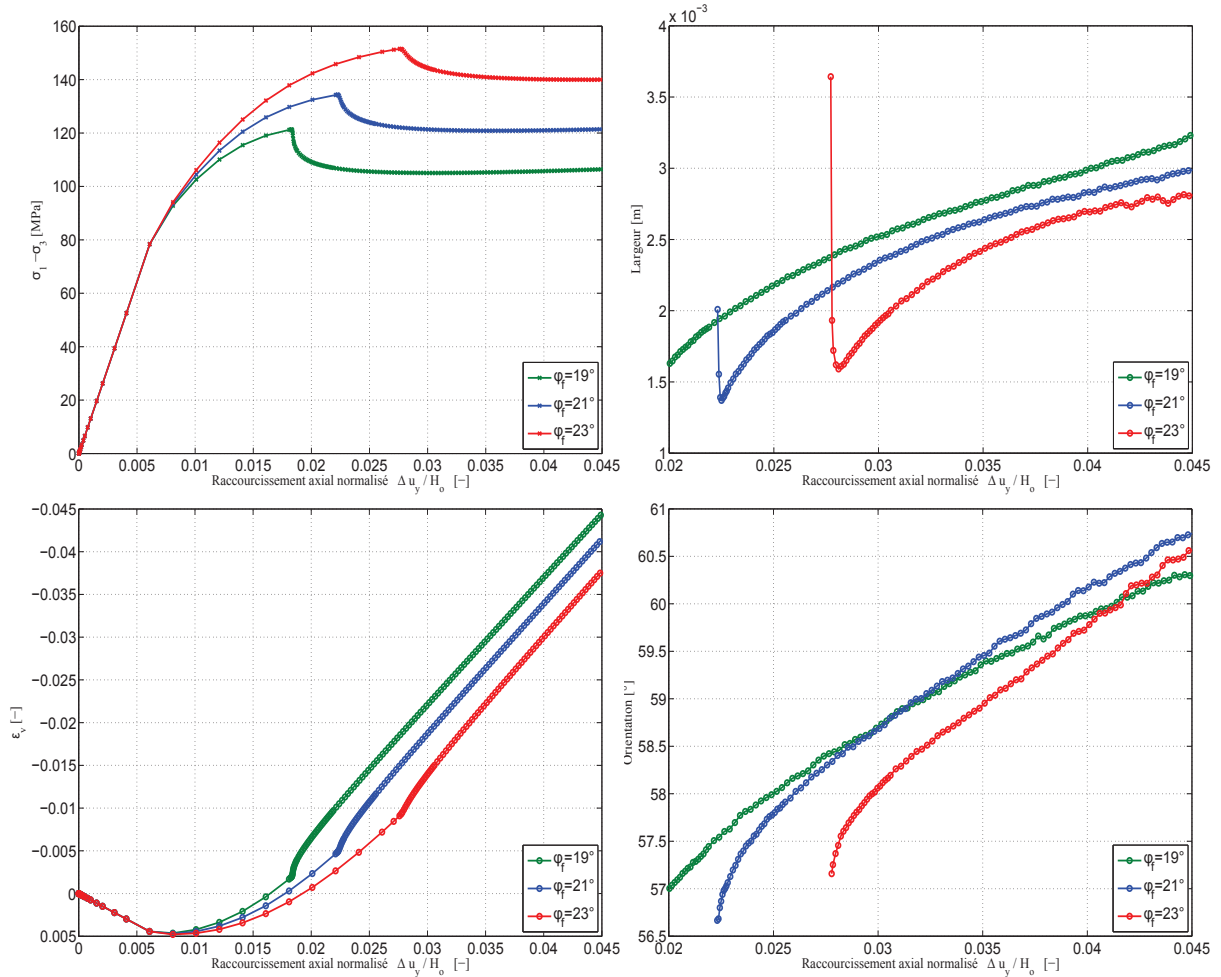


FIGURE 5.10 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $\varphi_f$  pour un confinement de 30 MPa

La figure 5.10 montre l'impact de la variation de  $\varphi_f$  sur les observables pour les calculs effectués avec 30 MPa de confinement. Nous remarquons que comme pour les calculs avec un confinement de 20 MPa, la diminution du frottement final augmente l'adoucissement. Toutefois, le calcul avec  $\varphi_f = 19^\circ$  ne présente pas de snapback pour le confinement de 30 MPa, cela met en évidence la dépendance de ce paramètre au confinement, ceci a déjà été expliqué pour l'étude de sensibilité sur les essais homogènes. Le palier de contrainte ainsi que la déformation volumique sont sensibles aux variations de  $\varphi_f$ . De plus, en augmentant ce dernier, nous augmentons la largeur de la bande. Ce paramètre a une légère influence sur l'orientation de la bande.

La figure 5.11 montre les résultats de l'étude de sensibilité sur le frottement final pour

les deux confinements de 20 et 30 MPa. Nous déduisons de ces données, que le pic et le palier de contrainte ainsi que la déformation axiale au pic, sont plus sensibles au variation du frottement final pour un confinement de 30 MPa que pour un confinement de 20 MPa.

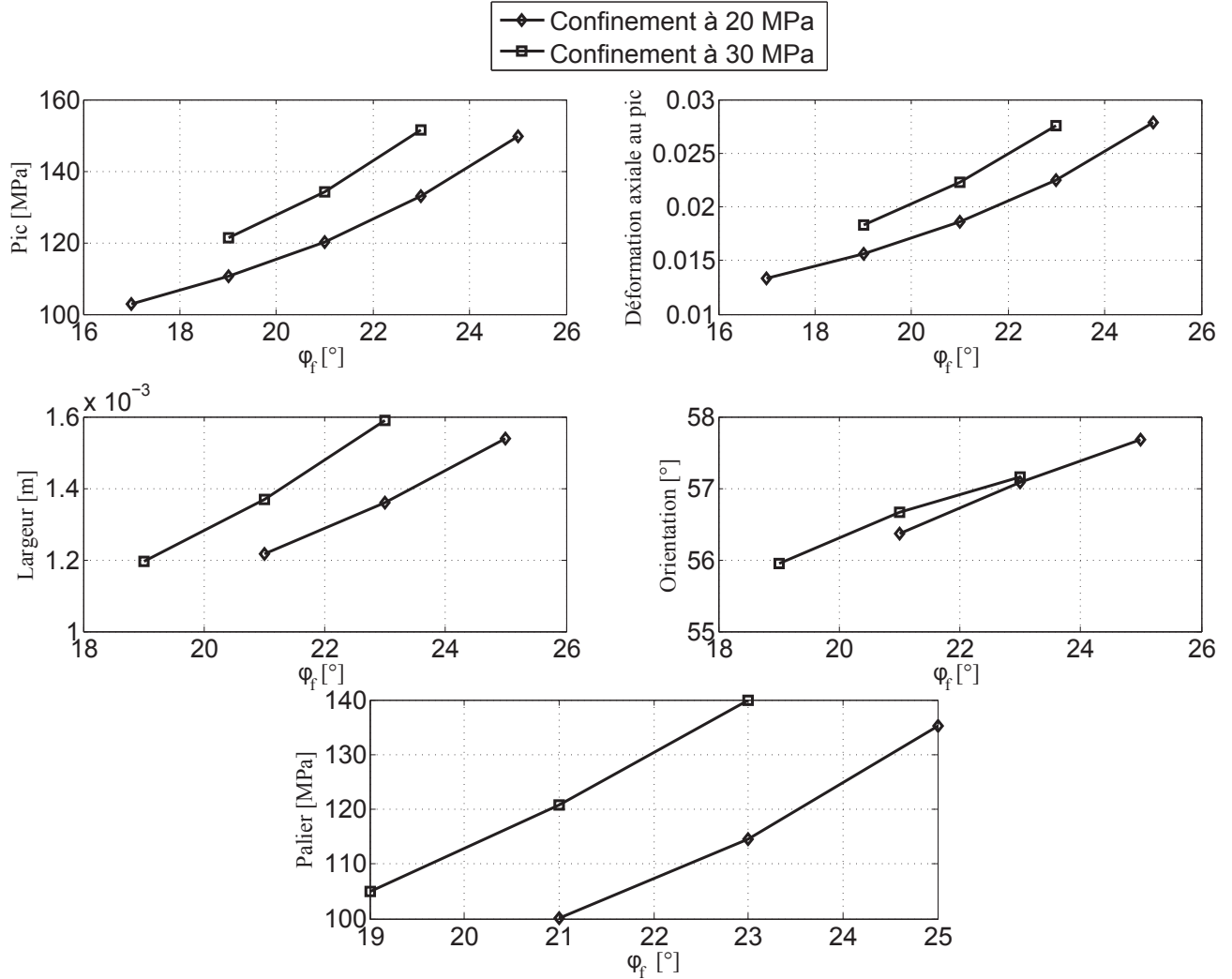


FIGURE 5.11 – Influence de la variation du paramètre  $\varphi_f$  sur les observables pour les confinements à 20 et 30 MPa

### 5.3.2 Étude de sensibilité sur le paramètre $\beta_\varphi$

Concernant l'étude de sensibilité sur  $\beta_\varphi$ , la figure 5.12 montre clairement que l'augmentation de  $\beta_\varphi$  fait diminuer le pic et augmente la déformation axiale au pic, tout en gardant le palier constant. De plus ce paramètre a peu d'influence sur la déformation volumique après l'initiation de la localisation. Cependant l'augmentation de  $\beta_\varphi$  a

comme conséquence de varier la largeur de la bande en maintenant l'orientation relativement constante. Ce paramètre aura un rôle important dans l'optimisation, il permet de faire varier le pic de contrainte sans varier le palier.

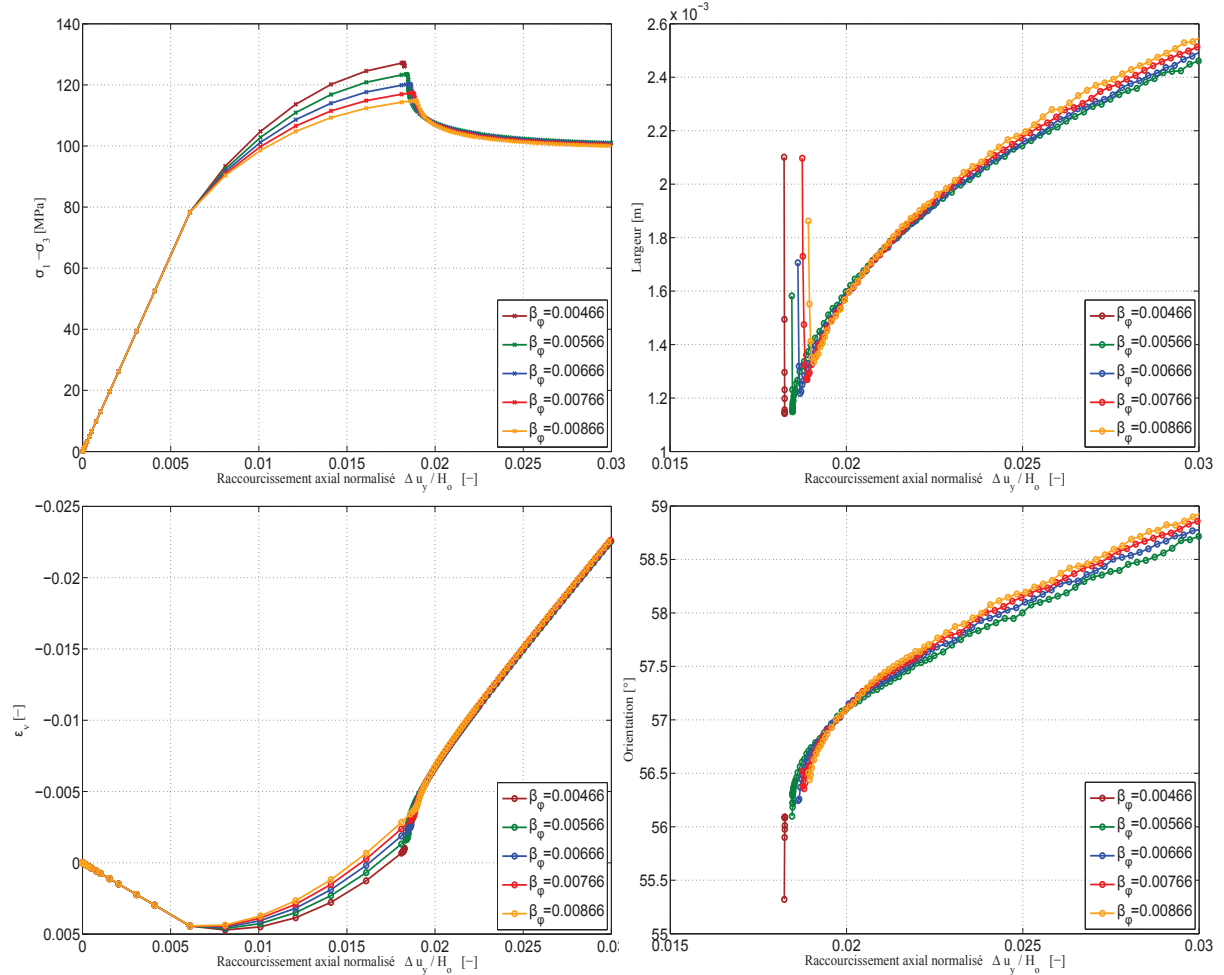


FIGURE 5.12 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $\beta_\varphi$  pour un confinement de 20 MPa

La figure 5.13 montre que la déformation axiale au pic varie légèrement avec la variation de  $\beta_\varphi$  pour un confinement de 30 MPa contrairement à un confinement de 20 MPa. Le pic et le palier de contrainte semblent avoir la même sensibilité vis-à-vis de  $\beta_\varphi$  quel que soit le confinement imposé. Pour les deux confinements, on remarque que la largeur de la bande croît avec l'accroissement de  $\beta_\varphi$ . La déformation volumique (après la localisation) ainsi que l'orientation de la bande sont très peu influencées par la modification de  $\beta_\varphi$ .



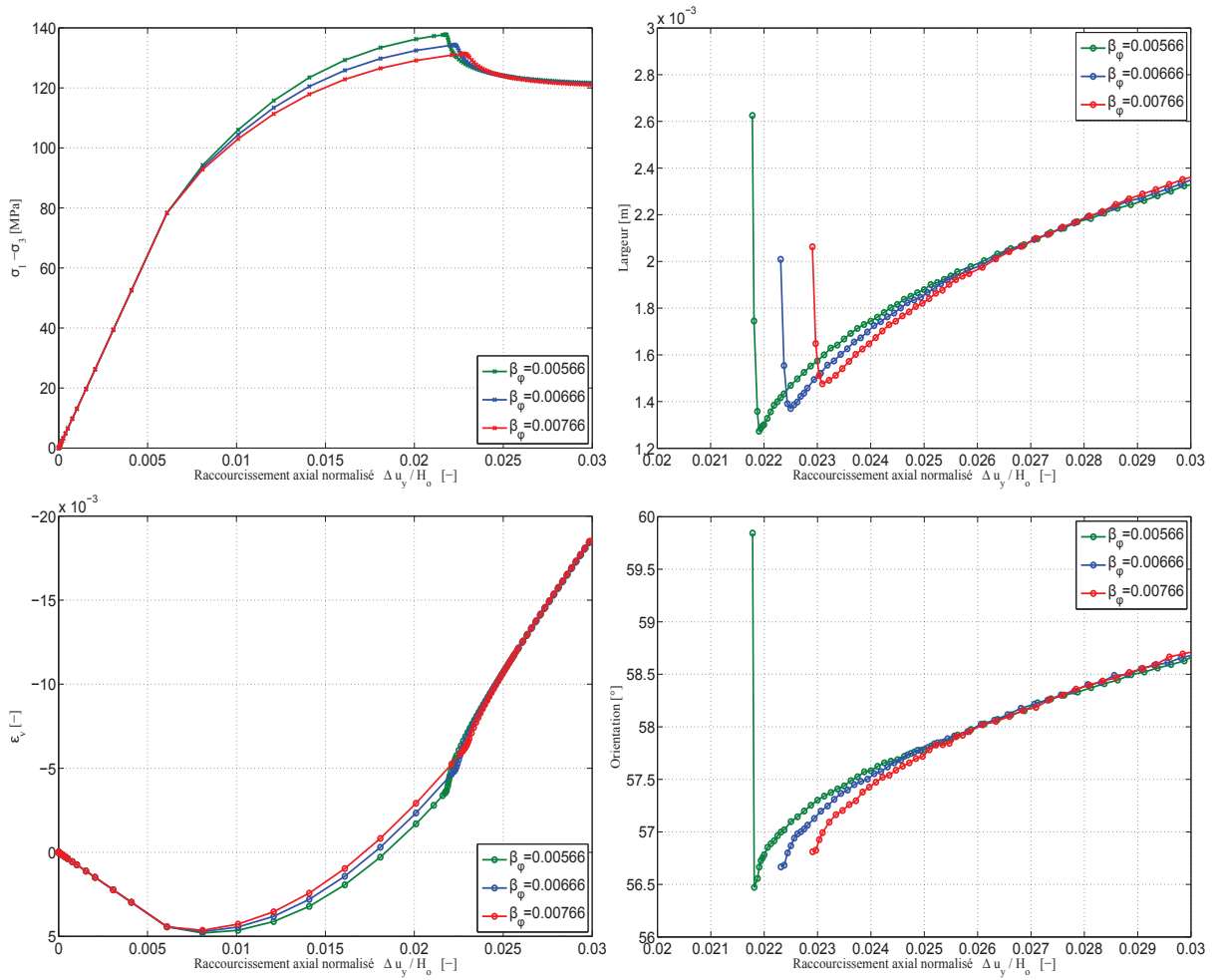


FIGURE 5.13 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $\beta_\varphi$  pour un confinement de 30 MPa

La figure 5.14 résume l'étude de sensibilité effectuée sur  $\beta_\varphi$ . Ce paramètre permet de modifier le pic, tout en gardant le palier et la déformation axiale au pic quasi constants.

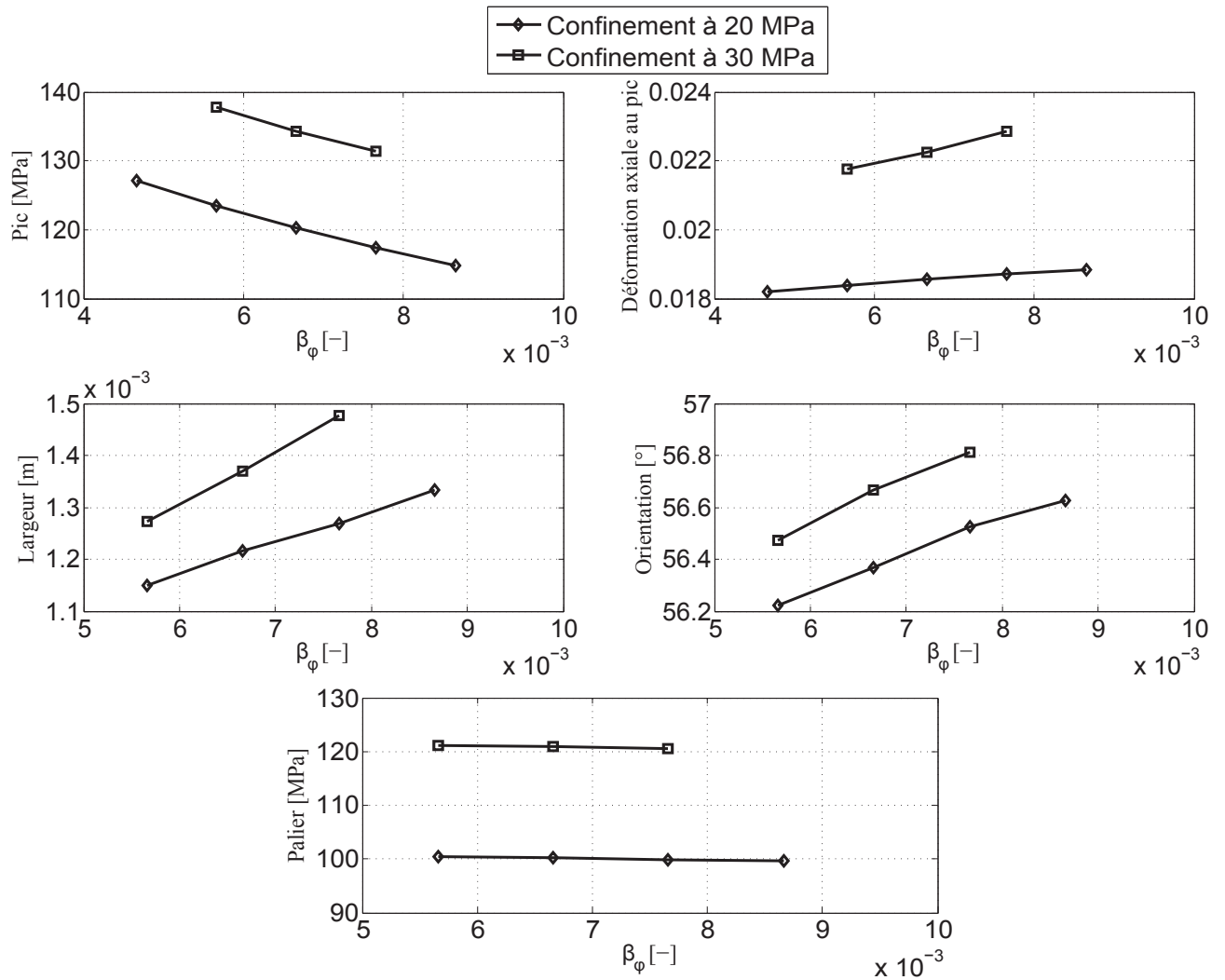


FIGURE 5.14 – Influence de la variation du paramètre  $\beta_\phi$  sur les observables pour les confinements à 20 et 30 MPa

## 5.4 Étude de sensibilité sur l'angle de dilatance et le paramètre second gradient $D$

Nous proposons ici l'étude de sensibilité effectuée sur l'angle de dilatance ainsi que sur le paramètre second gradient  $D$ . Nous allons analyser l'influence de ces paramètres sur les observables.

### 5.4.1 Étude de sensibilité sur l'angle de dilatance

Pour un confinement de 20 MPa, nous faisons varier l'angle de dilatance de 14 à 22°, puis nous observons l'influence de ces variations sur les observables numériques.

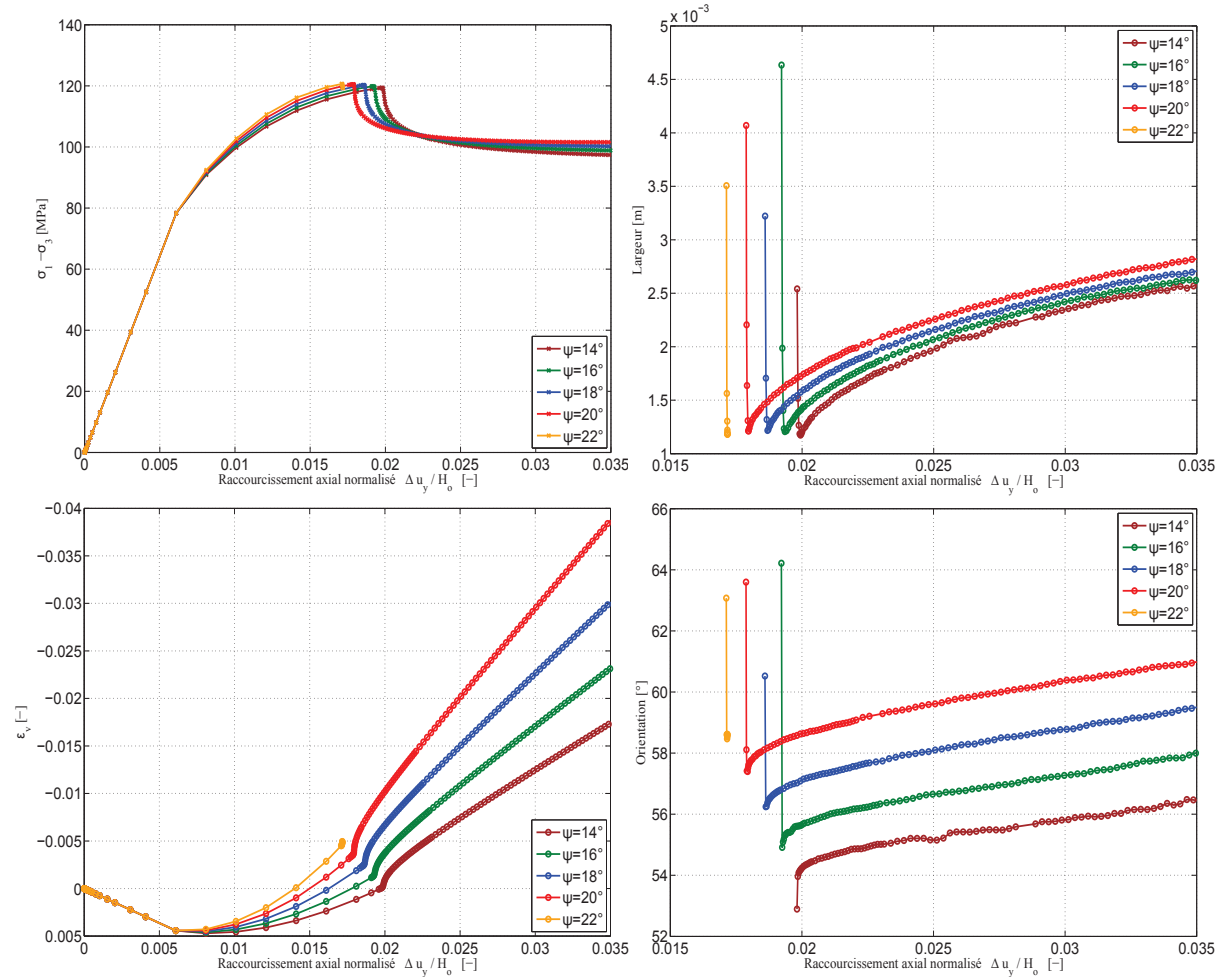
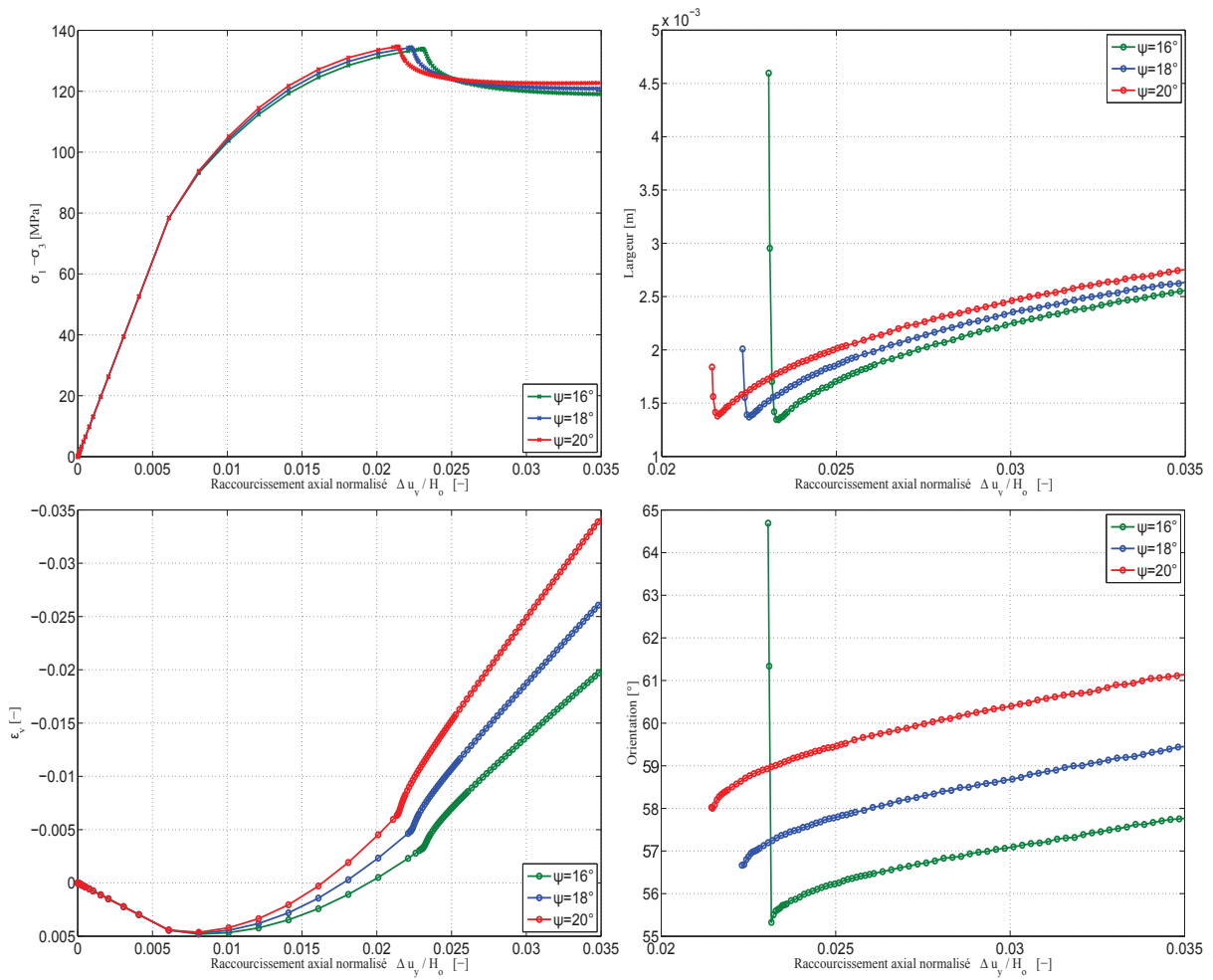


FIGURE 5.15 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $\Psi$  pour un confinement de 20 MPa

A 20 MPa de confinement, nous remarquons (figure 5.15) que le pic croît très faiblement avec la dilatance, puisque l'augmentation de la dilatance de 8° conduit à une variation du pic de moins de 2 MPa. Les courbes de déformation volumique sont affectées par la variation  $\Psi$ , avant et après la localisation. En augmentant l'angle de dilatance, on réduit la déformation axiale au pic tout en augmentant faiblement le palier de contrainte. L'orientation de la bande croît avec  $\Psi$ , celle-ci augmente de près de 4° quand  $\Psi$  augmente de 8°. La largeur de la bande est peu influencée par la modification de l'angle de dilatance.



**FIGURE 5.16** – Étude de sensibilité sur le paramètre  $\Psi$  pour un confinement de 30 MPa

La figure ci-dessus montre les résultats de l'étude de sensibilité sur l'angle de dilatance pour un confinement de 30 MPa. Les résultats obtenus sont similaires à ceux trouvés pour le confinement de 20 MPa. Nous remarquons que le pic de contrainte est très peu sensible à la variation de la dilatance. L'augmentation de ce dernier retarde l'initiation de la localisation et augmente légèrement le pic de contrainte. Les déformations volumiques sont très sensibles à la dilatance, puisque l'augmentation de celle-ci fait augmenter la pente de dilatance après le pic. La largeur de la bande change peu en fonction de la dilatance, mais celle-ci influence fortement son orientation.

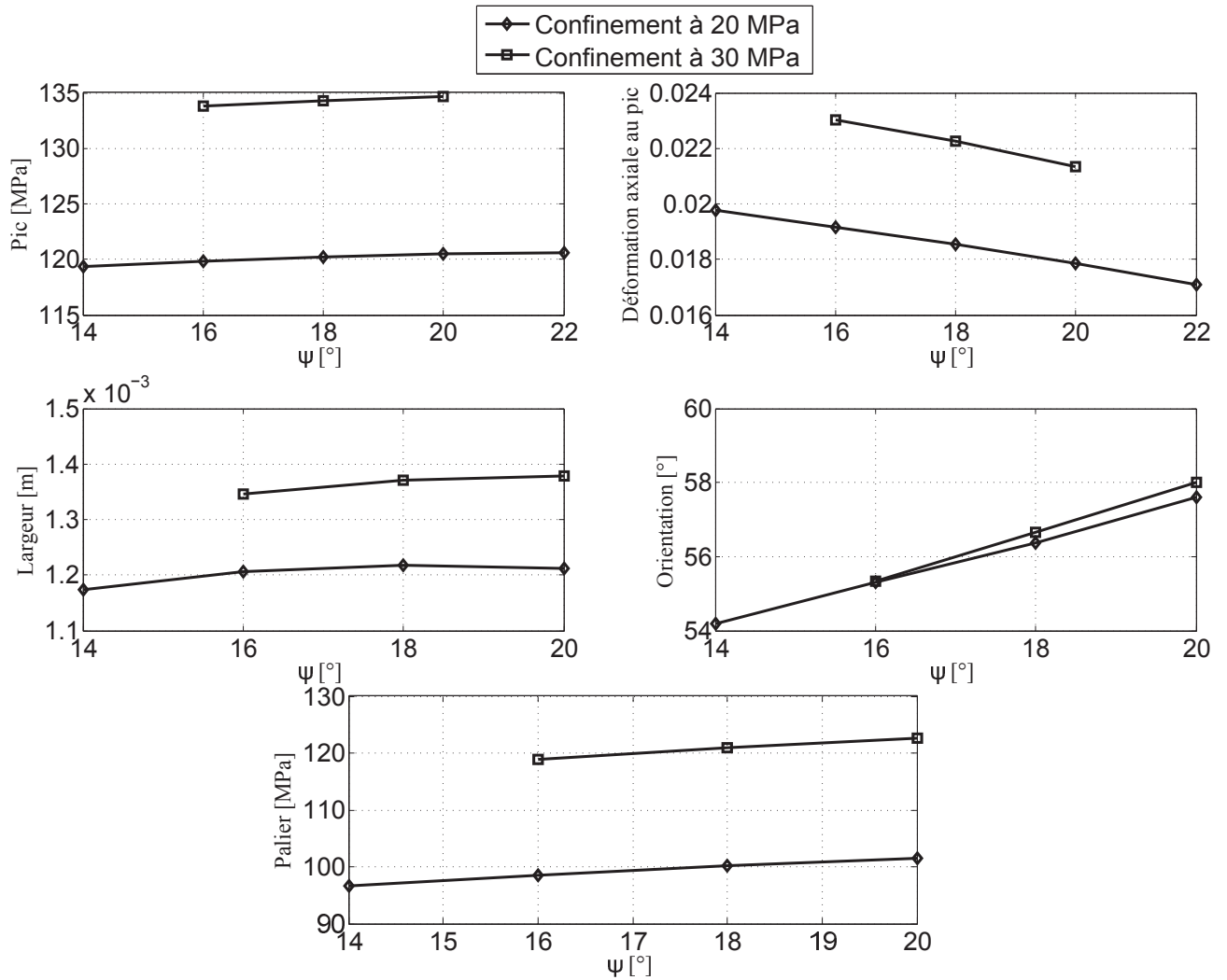


FIGURE 5.17 – Influence de la variation du paramètre  $\Psi$  sur les observables pour les confinements à 20 et 30 MPa

L'étude de sensibilité sur la dilataance (figure 5.17) pour les confinements de 20 et 30 MPa, révèle que ce paramètre a beaucoup d'influence sur les déformations volumiques ainsi que l'orientation de la bande. Il a peu d'effet sur la largeur de la bande, il fait aussi peu varier le pic et la palier de contrainte, mais il a un impact sur la déformation axial au pic. Il aura un rôle important quand à l'optimisation de la déformation volumique.

#### 5.4.2 Étude de sensibilité sur le paramètre second gradient $D$

Afin de connaître l'impact de la variation du paramètre second gradient  $D$  sur les observables, nous effectuons plusieurs calculs en variant  $D$  de  $0.75N$  à  $2.5N$ .

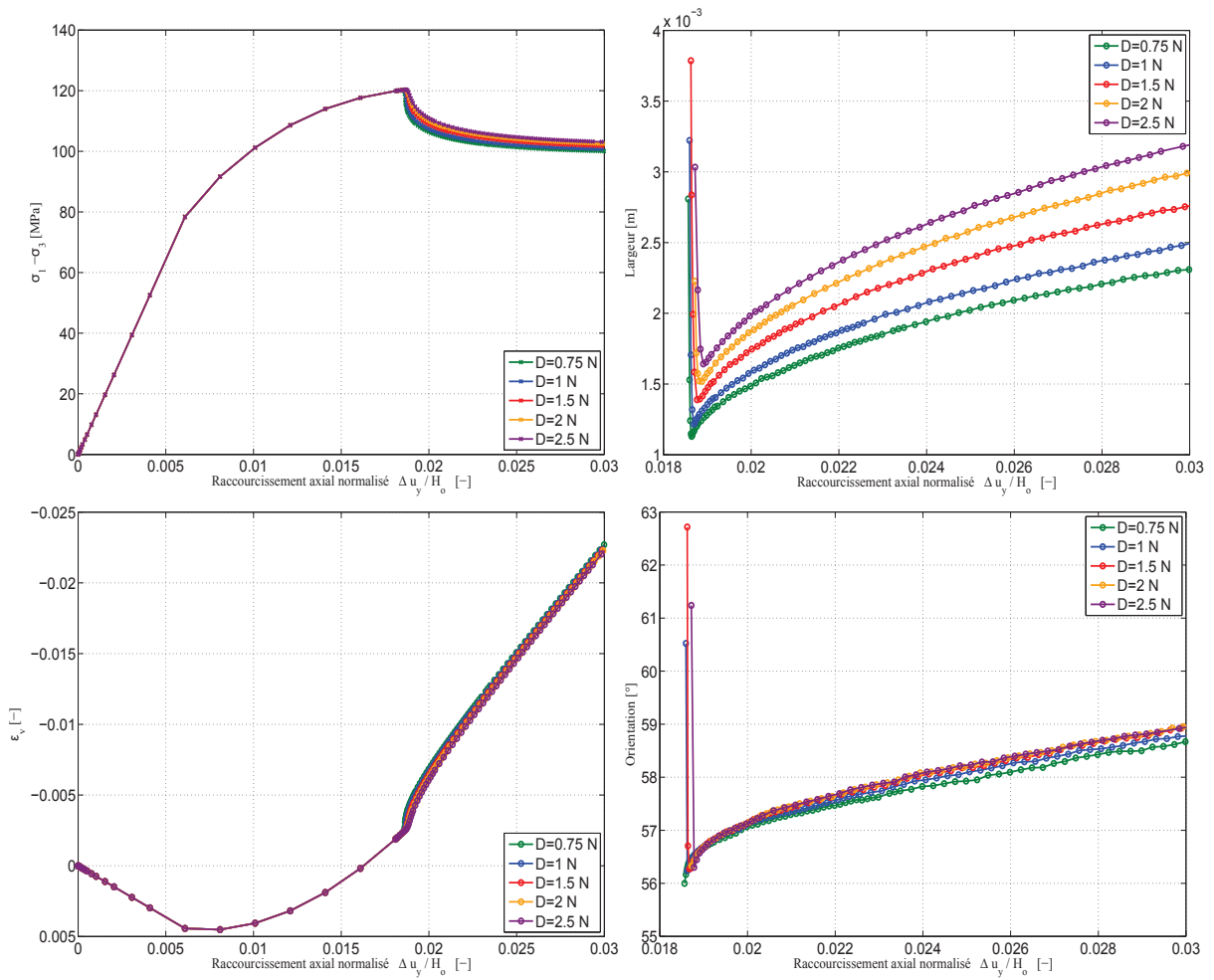


FIGURE 5.18 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $D$  pour un confinement de 20 MPa

Les résultats de l'étude de sensibilité sur  $D$  pour un confinement de 20 MPa sont montrés sur la figure 5.18. Nous en déduisons que  $D$  a très peu d'influence sur le pic et le palier de contrainte ainsi que la déformation axiale. En augmentant  $D$  le radoucissement après le pic devient moins fort. La variation de  $D$  n'a pas d'impact sur l'orientation de la bande. Cependant la largeur de la bande augmente significativement avec l'augmentation de ce paramètre. En variant  $D$  de  $0.75N$  à  $2.5N$  on augmente la largeur de 0.7 mm.  $D$  est le paramètre principal qui permet de faire varier la largeur de la bande.

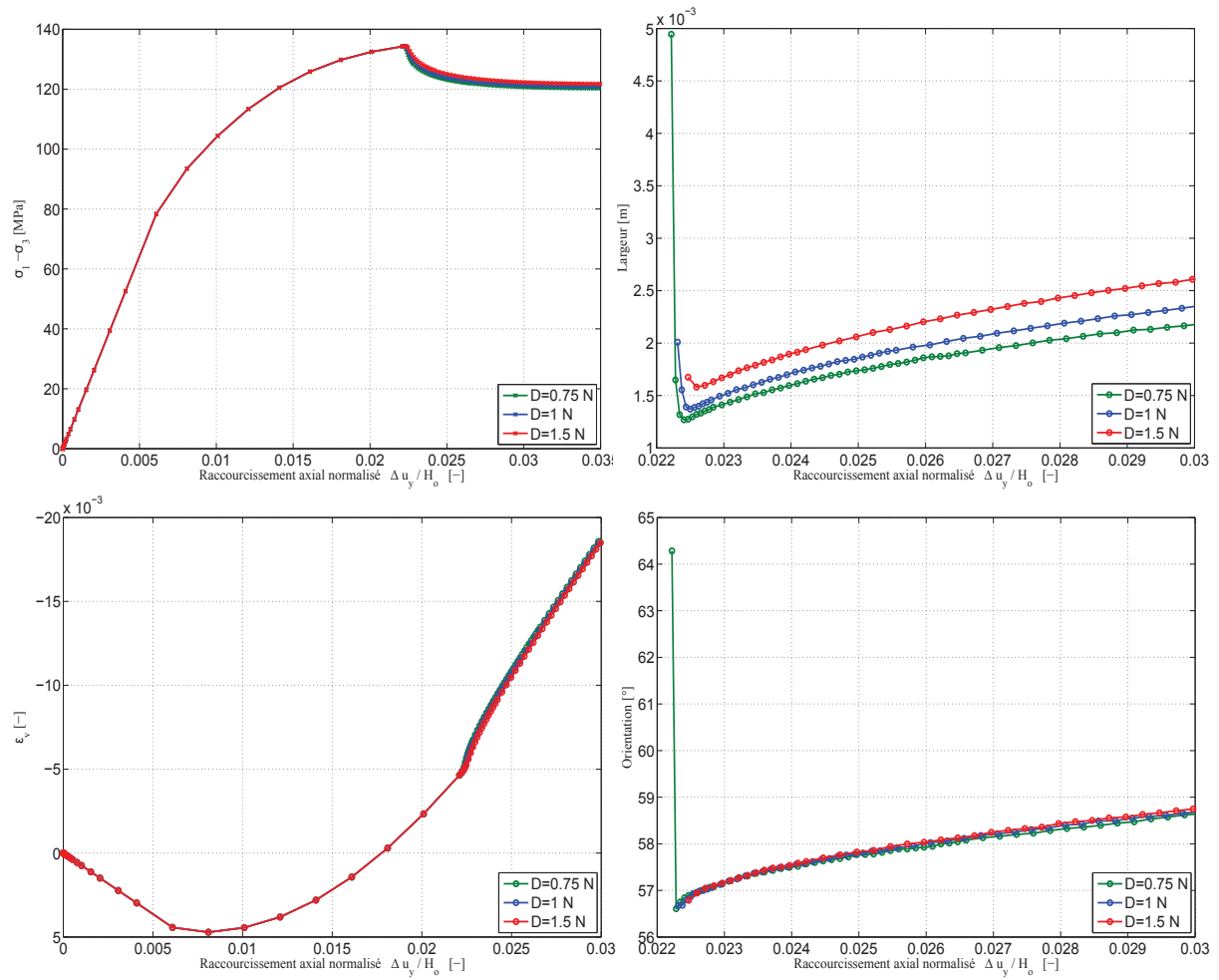


FIGURE 5.19 – Étude de sensibilité sur le paramètre  $D$  pour un confinement de 30 MPa

Pour l'étude de sensibilité effectuée avec un confinement de 30 MPa sur  $D$  (figure 5.19). Nous retrouvons les mêmes résultats obtenus pour les calculs avec un confinement de 20 MPa. Le paramètre second gradient a une grande influence sur la largeur de la bande, en multipliant la valeur de  $D$  par deux, nous avons multiplié la largeur de la bande par 1.19. Ce paramètre a très peu d'influence sur le reste des observables.

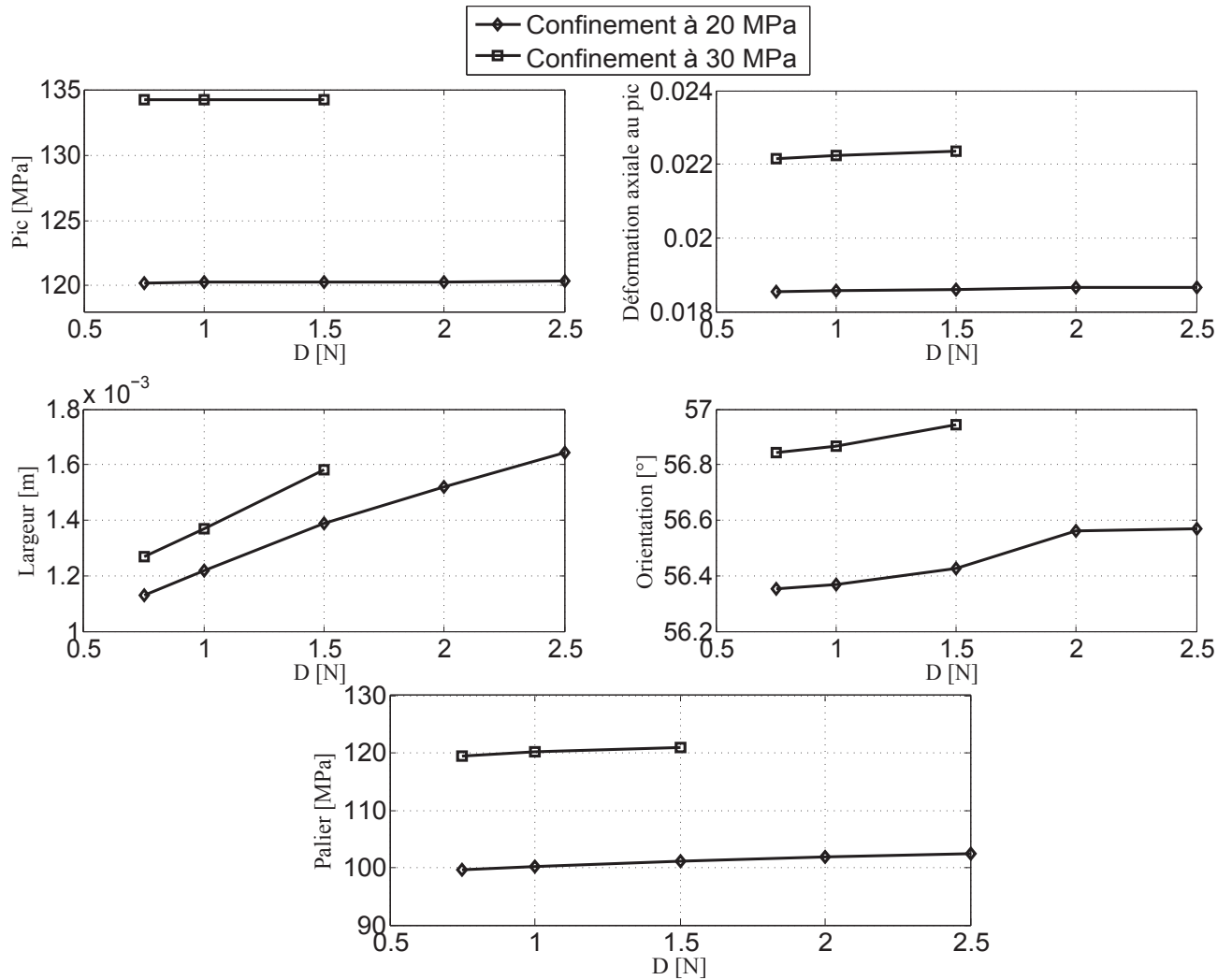


FIGURE 5.20 – Influence de la variation du paramètre  $D$  sur les observables pour les confinements à 20 et 30 MPa

La figure 5.20 résume les résultats de l'étude de sensibilité sur  $D$  pour les deux confinements de 20 et 30 MPa. Ces résultats montrent clairement l'influence de  $D$  sur la largeur de la bande. En effet, c'est le paramètre essentiel qui permet de varier la largeur de la bande. Il sera donc utilisé à cet effet lors de l'optimisation des observables.

## 5.5 Matrice de sensibilité

Après avoir effectué une étude de sensibilité détaillée sur les paramètres,  $c_f$ ,  $\varphi_f$ ,  $\beta_c$ ,  $\beta_\varphi$ ,  $\Psi$  et  $D$ , nous avons utilisé la méthode des différences finies afin de calculer la



sensibilité de chaque observable vis-à-vis des paramètres de la loi constitutive. Nous avons ensuite déterminé la matrice de sensibilité qui sera utilisée pour l'optimisation. Étant donné que la largeur de la bande est contrôlée essentiellement par le paramètre second gradient, nous ne prendrons pas en compte cet observable dans la matrice de sensibilité. Elle pourrait en effet être optimisée distinctement des autres observables. Nous allons exclure la déformation volumique de la matrice de sensibilité. Celle-ci sera optimisée grâce à l'angle de dilatance qui a un impact essentiellement sur la courbe de variation de volume. Nous ne prendrons pas en compte l'orientation de la bande dans la matrice de sensibilité puisque l'orientation obtenue durant les calculs, correspond à ce qui est observé expérimentalement.

La matrice de sensibilité  $A$  est définie à partir de la relation 5.1. Dans cette relation les termes à gauche désignent les variations du pic et du palier de contrainte ainsi que de la déformation axiale au pic que l'utilisateur souhaite obtenir pour des confinements de 20 et 30 MPa. A droite nous avons les variations de paramètres qui permettent d'atteindre cet objectif.

$$\begin{bmatrix} \Delta Pic_{20} \\ \Delta Def_{20} \\ \Delta Pal_{20} \\ \Delta Pic_{30} \\ \Delta Def_{30} \\ \Delta Pal_{30} \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} \Delta \beta_c \\ \Delta \beta_\varphi \\ \Delta c_f \\ \Delta \varphi_f \\ \Delta D \\ \Delta \Psi \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Où  $A$  vaut :

$$A = \begin{bmatrix} 833.33 & -3030.3 & 1.58 & 5.78 & 0.066 & 0.15 \\ 0.16 & 0.16 & 0.0006 & 0.0016 & 0.000074 & -0.00028 \\ 156.25 & -250 & 4.76 & 8.62 & 1.26 & 0.6 \\ 800 & -3676.47 & 2.2 & 7.09 & 0.06 & 0.23 \\ 0.18 & 0.55 & 0.001 & 0.0021 & 0.00007 & -0.0045 \\ 347.22 & -312.5 & 4.78 & 8.33 & 1.96 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

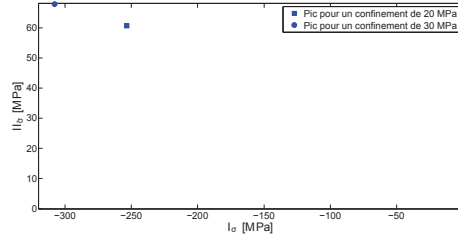
et  $A^{-1}$  inverse de  $A$  vaut :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0329 & -0.000781 & 22.634 & -11.05 & -14.439 & 0.795 \\ -0.00225 & 0.000193 & -1.892 & 0.934 & 1.0854 & -0.0275 \\ 0.0111 & -0.000292 & 9.12 & -4.19 & -6.55 & 0.345 \\ -0.0281 & 0.000445 & -19.4 & 9.50 & 12.3 & -0.702 \\ 0.000170 & -0.0000146 & 0.146 & -0.0711 & -0.0824 & -0.0193 \\ -0.00654 & 0.000131 & -5.32 & 2.43 & 4.42 & -0.208 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

## 5.6 Introduction du frottement apparent et de la cohésion apparente dans la matrice de sensibilité

Comme pour les calculs homogènes, les calculs hétérogènes ont montré que les paramètres liés au frottement et qui sont  $\beta_\varphi$  et  $\varphi_f$ , sont ceux pour lesquels nous avons une disparité sur les résultats entre un confinement de 20 MPa et un confinement de 30 MPa. Ceci risque d'être problématique pour l'optimisation. En effet, si les paramètres utilisés pour l'optimisation font intervenir  $\beta_\varphi$  et  $\varphi_f$ , nous ne pourrions nous approcher simultanément des pics à 20 et 30 MPa.

Afin résoudre ce problème nous introduisons la cohésion et le frottement apparent dans la matrice de sensibilité. Ces deux observables sont calculés à partir de la pente et de l'ordonnée à l'origine de la droite définie par les pics de contraintes dans le plan  $I_\sigma - II_{\hat{\sigma}}$  (figure 5.21).



**FIGURE 5.21** – Pics de contraintes dans le plan  $I_\sigma - II_{\hat{\sigma}}$  pour les calculs effectués avec les paramètres de référence et les deux confinements de 20 et 30 MPa

La droite passant par les deux points s'exprime de la manière suivante ([4]) :

$$II_{\hat{\sigma}} = -mI_\sigma + k \quad (5.4)$$

$m$  et  $k$  sont les coefficients de la droite définie par les pics de contrainte dans le plan  $I_\sigma - II_{\hat{\sigma}}$ . Pour calculer  $II_{\hat{\sigma}}$ , nous avons besoin de la contrainte hors plan  $\sigma_z$ , pour la calculer nous faisons une moyenne des contraintes de chaque point de Gauss de chaque élément. Après avoir déterminé les coefficients  $m$  et  $k$ , il est facile de calculer la cohésion apparente  $c_a$  et le frottement apparent  $\varphi_a$  :

$$\begin{cases} \sin \varphi_a = \frac{3\sqrt{3}m}{2+m\sqrt{3}} \\ c_a = \frac{\tan \varphi_a k}{3m} \end{cases} \quad (5.5)$$

### 5.6.1 Complément de l'étude de sensibilité

Afin de pouvoir introduire les nouveaux observables  $c_a$  et  $\varphi_a$  dans la matrice de sensibilité, il est nécessaire d'étendre l'étude de sensibilité à ces deux observables. Nous allons donc analyser l'influence des paramètres sélectionnés pour l'étude de sensibilité sur  $c_a$  et  $\varphi_a$ .

Les résultats de cette étude de sensibilité sont présentés ci-dessous (figure 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26 et 5.27). Nous constatons que pour tous les paramètres (à l'exception de  $\beta_\varphi$ ),  $\varphi_a$  augmente avec l'augmentation du paramètre. Cette augmentation n'indique pas nécessairement que le pic augmente. En effet si  $\varphi_a$  augmente et que  $c_a$  diminue il est difficile de déduire le comportement du pic de contrainte.  $c_a$  a tendance à diminuer avec l'augmentation de tous les paramètre hormis  $\beta_c$ .

Pour  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$ , les deux observables  $c_a$  et  $\varphi_a$  évoluent avec la même tendance (figures 5.23 et 5.25). Nous pouvons donc en déduire qu'en augmentant  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$  respectivement, nous augmentons et diminuons le pic. En ce qui concerne les figures 5.22, 5.24 et 5.26, il est difficile de savoir directement à partir de ces figures comment évolue le pic, puisque  $c_a$  et  $\varphi_a$  ne varient pas de la même façon. En prenant en compte l'échelle de la figure 5.27 nous remarquons que  $c_a$  et  $\varphi_a$  varient peu en fonction de  $D$ . Ce paramètre a donc très peu d'influence sur le pic.

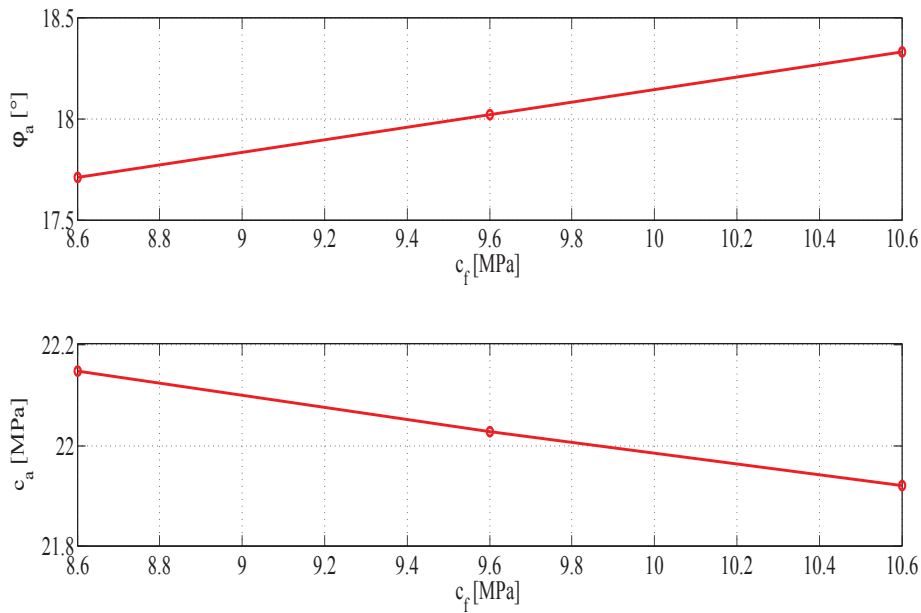


FIGURE 5.22 – Sensibilité de  $c_a$  et  $\varphi_a$  à la cohésion finale

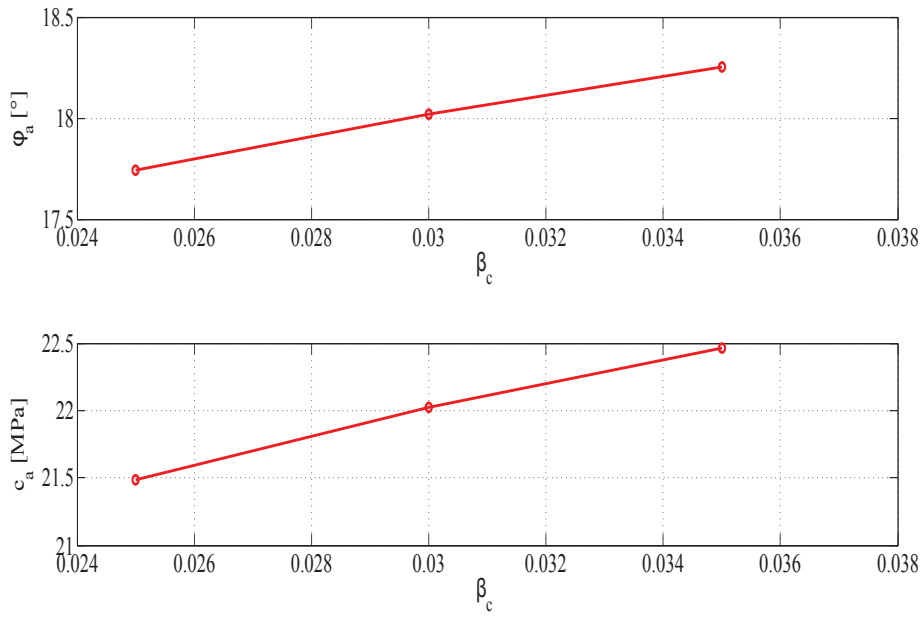


FIGURE 5.23 – Sensibilité de  $c_a$  et  $\varphi_a$  au paramètre  $\beta_c$

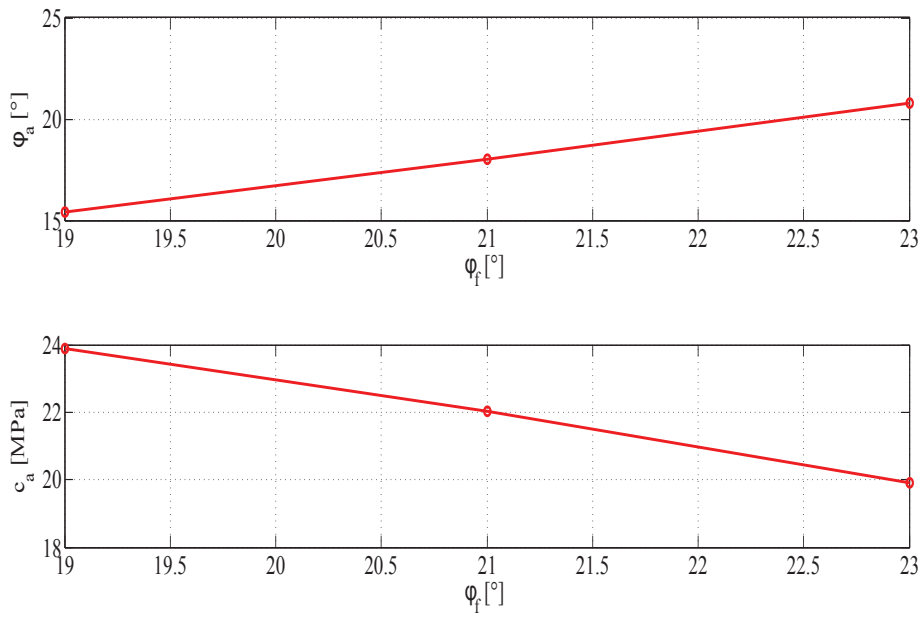


FIGURE 5.24 – Sensibilité de  $c_a$  et  $\varphi_a$  au frottement final

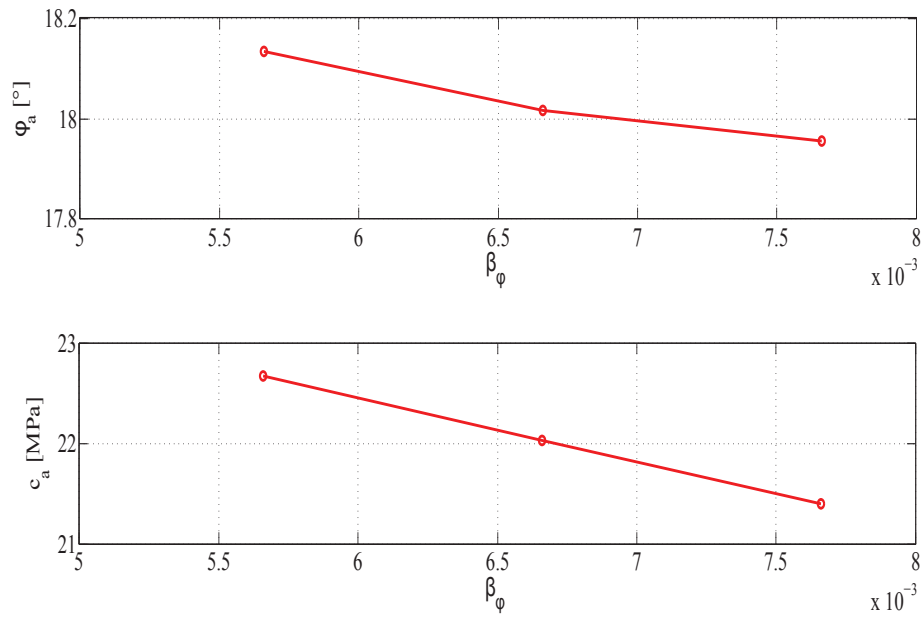


FIGURE 5.25 – Sensibilité de  $c_a$  et  $\varphi_a$  au paramètre  $\beta_\varphi$

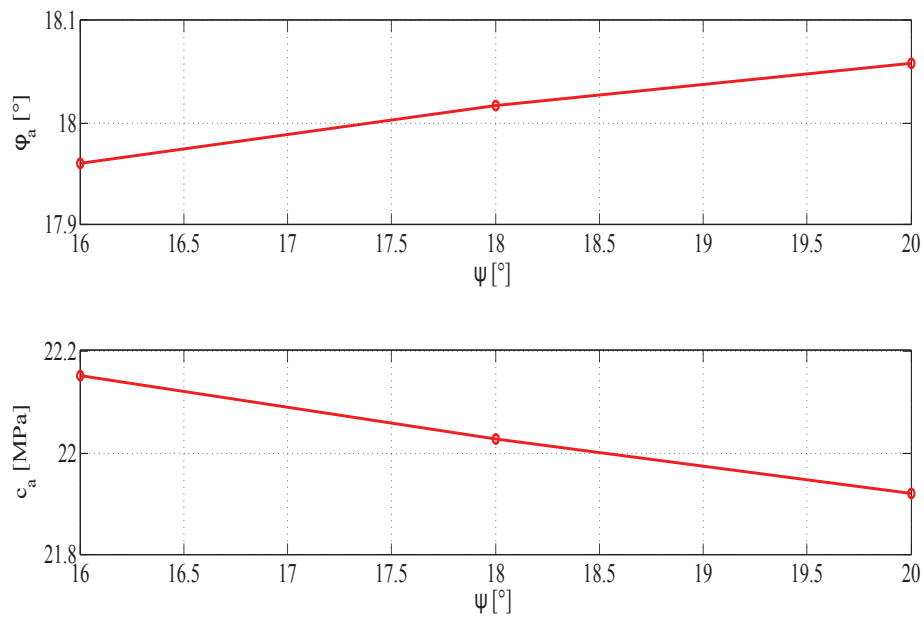


FIGURE 5.26 – Sensibilité de  $c_a$  et  $\varphi_a$  à l'angle de dilataance

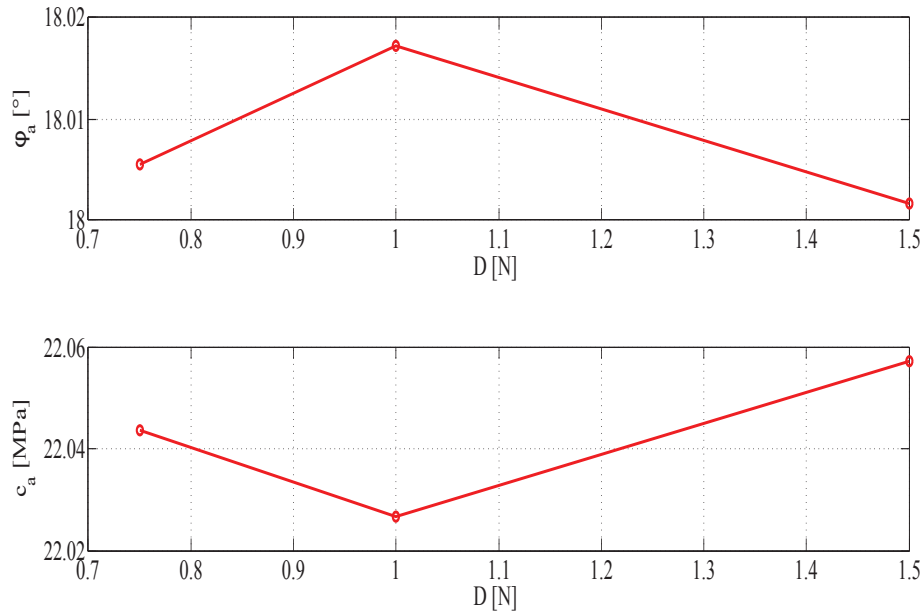


FIGURE 5.27 – Sensibilité de  $c_a$  et  $\varphi_a$  au paramètre second gradient  $D$

Une fois cette étude de sensibilité terminée il est essentielle de redéfinir la matrice de sensibilité. En effet, nous avons introduit deux observables à cette étude de sensibilité qui sont la cohésion apparente et le frottement apparent. La matrice n'est donc plus carrée puisque nous avons 8 observables et 6 paramètres constitutifs. Pour des aspects pratiques, nous pouvons ajouter à ces 6 paramètres le frottement initial ainsi que la cohésion initiale afin que la matrice redevienne carrée et inversible.

Nous avons utilisé dans l'optimisation (chapitre suivant) la première matrice de sensibilité définie sans les deux observables  $c_a$  et  $\varphi_a$ . En effet, étant donné que nous travaillons avec seulement deux confinements nous avons estimé qu'il n'était pas nécessaire d'utiliser ces deux observables. Ces derniers peuvent être utilisés si nous disposions d'une campagne d'essais expérimentaux plus complète. Cependant, ils doivent être utilisés avec précautions. Car, ces deux paramètres dépendent du pic de contrainte, il y aura donc une dépendance entre les observables. Il est connu que le fait d'avoir une dépendance entre les données, réduit significativement les chances d'obtenir une solution optimisée à l'aide de l'analyse inverse. Il serait donc peut être mieux d'utiliser  $c_a$  et  $\varphi_a$  dans la matrice de sensibilité sans prendre en compte les pics de contraintes, et de vérifier indépendamment de la procédure d'analyse inverse que les valeurs du pic de contrainte numérique correspond à ce qui est obtenu numériquement. Ou bien de n'utiliser qu'un pic de contrainte pour un seul confinement, associé à  $c_a$  et  $\varphi_a$ .

## 5.7 Conclusions

Nous avons présenté à travers ce chapitre l'étude de sensibilité effectuée sur 6 paramètres constitutifs qui sont : la cohésion finale, le frottement final,  $\beta_c$ ,  $\beta_\varphi$ , l'angle de dilataance ainsi que le paramètre second gradient  $D$ . Cette étude de sensibilité vise à définir la matrice de sensibilité afin de pouvoir procéder à l'optimisation des observables. Les résultats de cette étude sensibilité sont résumés au tableau 5.2. Nous pouvons néanmoins souligner les points suivants :

- Le pic et le palier de contraintes sont très sensibles à la cohésion finale et au frottement final
- $\beta_\varphi$  permet de modifier le pic de contrainte en gardant la déformation axiale quasi constante et sans apporter de modifications importantes aux autres observables
- La déformation volumique est très sensible à l'angle de dilataance, ce paramètre modifie de manière significative le régime dilatant après le pic
- Le paramètre second gradient permet de modifier la largeur de la bande, en changeant peu les autres observables

Nous avons remarqué que la sensibilité du pic par rapport à  $\varphi_f$  et  $\beta_\varphi$  variait selon le confinement imposé. Pour dépasser cette difficulté nous avons introduit deux nouveaux observables qui sont la cohésion apparente et le frottement apparent. Ces deux observables permettraient d'optimiser le pic de contrainte à la fois pour le confinement de 20 et de 30 MPa, quel que soit le paramètre utilisé pour cette optimisation. Cependant l'optimisation que nous proposons dans le cadre de cette thèse ne tient pas compte de ces deux observables.

Maintenant que la matrice de sensibilité est obtenue il est possible de procéder à l'optimisation des observables, celle-ci sera présentée au prochain chapitre.

Paramètre \ Observable	Pic	Def	Palier	$\varepsilon_v$	Larg	Ori
$c_f$	***	***	***	**	**	o
$\beta_c$	***	***	**	**	**	o
$\varphi_f$	***	***	***	**	**	*
$\beta_\varphi$	**	o	*	**	**	o
$\Psi$	o	**	*	***	o	***
$D$	o	o	*	o	***	o

**TABLE 5.2** – Résumé des résultats de l'étude de sensibilité, les symboles utilisés dans le tableau désignent :

\*\*\* forte influence, \*\* moyenne influence, \* faible influence et o influence négligeable

---

### Optimisation des observables

---

Ce chapitre a pour objectif de présenter la méthode d'optimisation qui s'appuie sur les résultats de l'étude de sensibilité abordée au chapitre 5. Cette méthode consiste à obtenir une combinaison de jeux de paramètres qui permet d'optimiser chaque observable indépendamment des autres. Seule l'orientation de la bande sera exclue de cette optimisation, puisque les orientations de bandes obtenues numériquement correspondent aux orientations de bandes observées expérimentalement. Le palier de contrainte a été corrigé uniquement pour l'optimisation de la largeur. Au moment où nous avons effectué cette optimisation, nous ne disposions pas des données nécessaires pour corriger le palier pour tous les observables. Cependant, nous montrerons qu'il est possible d'optimiser le palier de contrainte. Il est donc tout à fait possible d'utiliser le jeu de paramètres utilisé pour l'optimiser afin de le corriger. Les observables optimisés sont donc le pic et le palier de contrainte, la déformation axiale au pic, la déformation volumique ainsi que la largeur de la bande.

En plus de l'optimisation nous présenterons dans ce chapitre une évolution de la loi de comportement par l'introduction d'un angle de dilatance variable dans les calculs. L'introduction de cette variation fera intervenir de nouveaux paramètres constitutifs dans la loi Plasol. Elle permet de mieux se rapprocher des courbes de déformation volumique expérimentales. Nous proposons à la fin de ce chapitre un jeu de paramètres qui permet de reproduire de manière fiable les données expérimentales fournies pour les confinements de 20 et 30 MPa.



## 6.1 Méthodologie

L'optimisation que nous proposons permet de modifier chaque observable indépendamment de l'autre. L'étude de sensibilité a montré que la modification d'un paramètre constitutif entraînait, dans la plupart des cas, la modification de tous les observables. Pour varier un seul observable, nous choisissons d'utiliser le paramètre auquel il est le plus sensible et qui aura le minimum d'impact sur les autres observables (dans la mesure du possible). Cette modification entraînera la variation de l'observable en question mais aussi la variation d'autres observables. Nous utiliserons dans ce cas une combinaison de paramètres constitutifs qui permettra de rétablir les valeurs initiales des autres observables.

## 6.2 Optimisation du pic de contrainte

L'étude de sensibilité a montré que les paramètres auxquels le pic de contrainte est le plus sensible sont le frottement final et la cohésion finale. Cependant ces deux paramètres, ont aussi un grand impact sur le palier de contrainte. Pour cette raison nous avons décidé d'optimiser le pic à l'aide du paramètre  $\beta_\varphi$ . Rappelons qu'en modifiant  $\beta_\varphi$ , nous modifions la déformation axiale au pic et très peu le palier de contrainte. Nous utiliserons en plus de  $\beta_\varphi$  le paramètre  $\beta_c$ , qui permettra de rétablir les valeurs de la déformation axiale. Nous présentons ci-dessous les modifications à apporter à  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$ , pour augmenter le pic de contrainte d'environ 2.5 MPa.

	$\Delta Pic$ [MPa]	$\Delta Def$ [-]	$\Delta Larg$ [mm]	$\Delta Ori$ [°]	$\Delta Pal$ [MPa]
$\Delta\beta_c = 0.00064$	0.54	0.01%	-0.001	0.01	0.54
$\Delta\beta_\varphi = -0.00066$	2	-0.01%	-0.38	-0.088	0.16
Total	2.54	0%	-0.04	-0.08	0.7

**TABLE 6.1** – Modifications à apporter à  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$  afin d'augmenter le pic de 2.5 MPa

Dans le but de tester la solution qui permet d'optimiser le pic de contrainte (tableau 6.1), nous avons effectué 2 calculs. En partant des paramètres de référence utilisés lors de l'étude de sensibilité, nous modifions les paramètres  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$ , afin d'augmenter le pic de 2.5 MPa (1<sup>er</sup> calcul), et le diminuer de 2.5 MPa (2<sup>e</sup> calcul).

La figure 6.1 montre les résultats de l'optimisation du pic de contrainte. La courbe bleue représente la courbe de référence. Nous remarquons de ces résultats que le pic de contrainte a été augmenté d'environ 2.5 MPa (courbe rouge), et diminué de 2.5 MPa (courbe verte). Les déformations volumiques sont très semblables pour les trois calculs. De plus, la déformation axiale au pic reste la même quel que soit le niveau du pic.

La largeur de la bande et son orientation (figure 6.2) ne sont pas influencées par les variations du pic de contrainte. En effet, les courbes de variation de la largeur et de l'orientation en fonction du raccourcissement axiale normalisé coïncident bien. Cela montre que la combinaison de paramètres que nous proposons pour modifier le pic de contrainte, n'a aucun impact sur les propriétés de la bande de localisation, comme c'était souhaité.

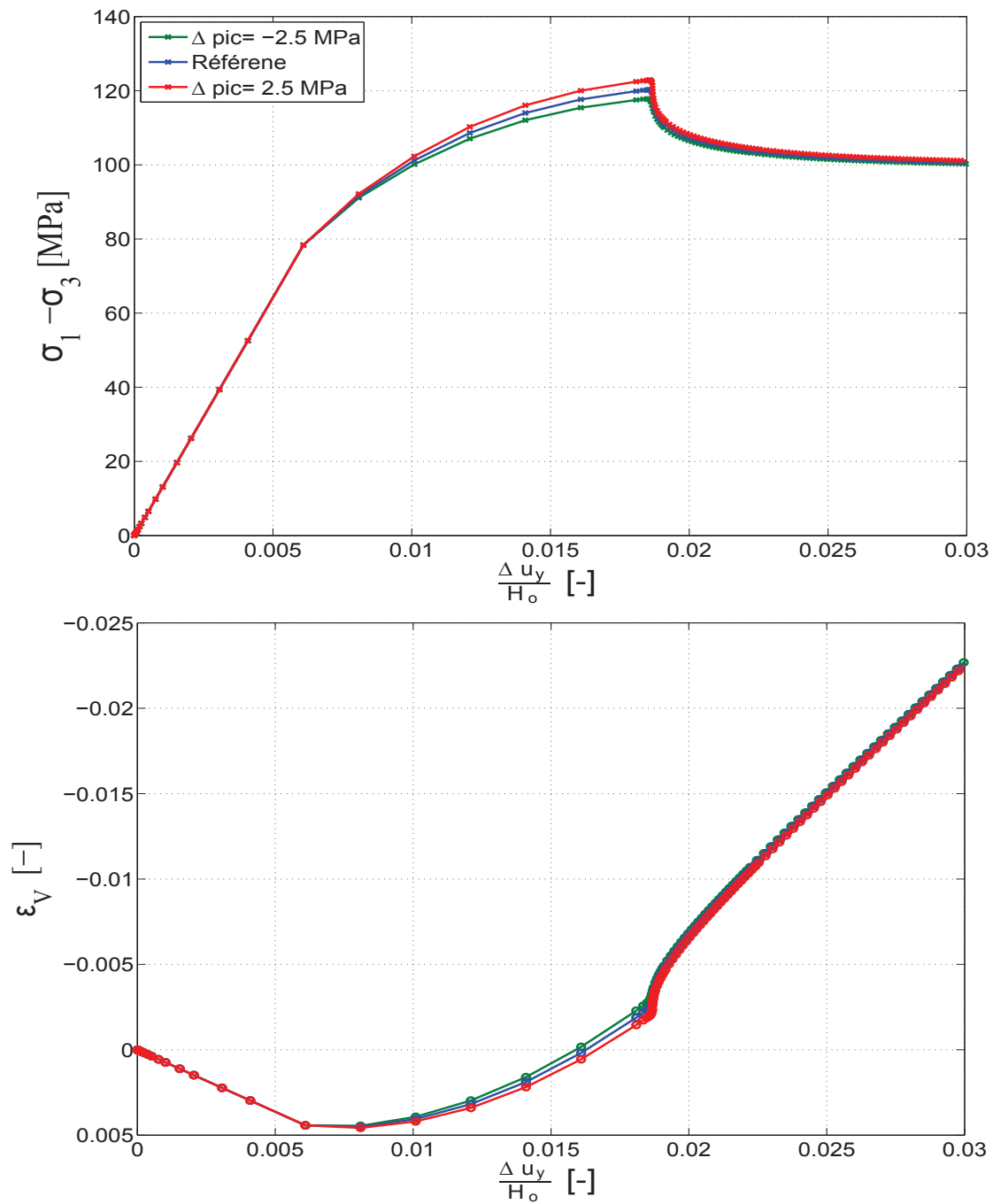


FIGURE 6.1 – Réponse mécanique des calculs qui visent à optimiser le pic. Le confinement imposé est de 20 MPa.

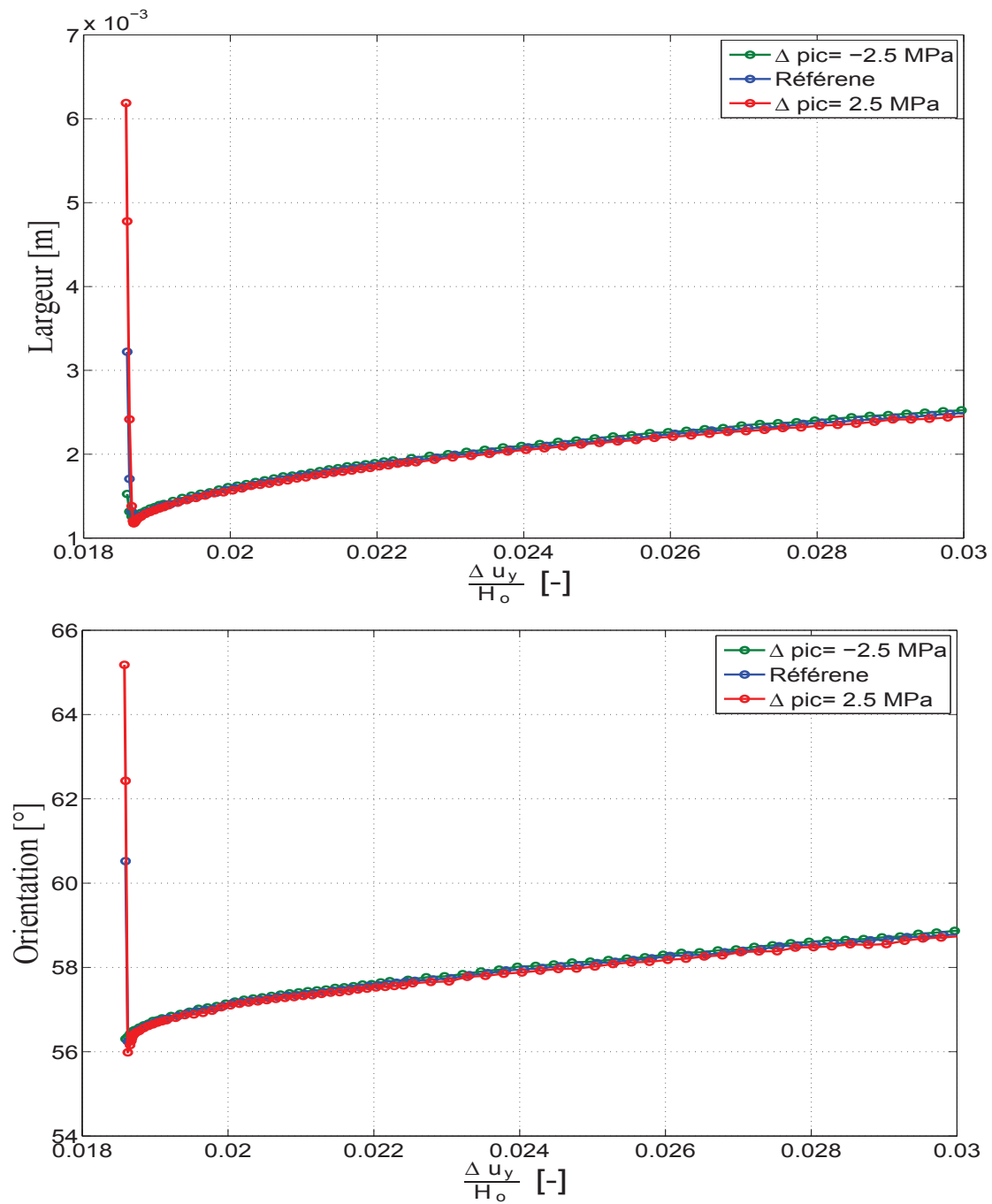
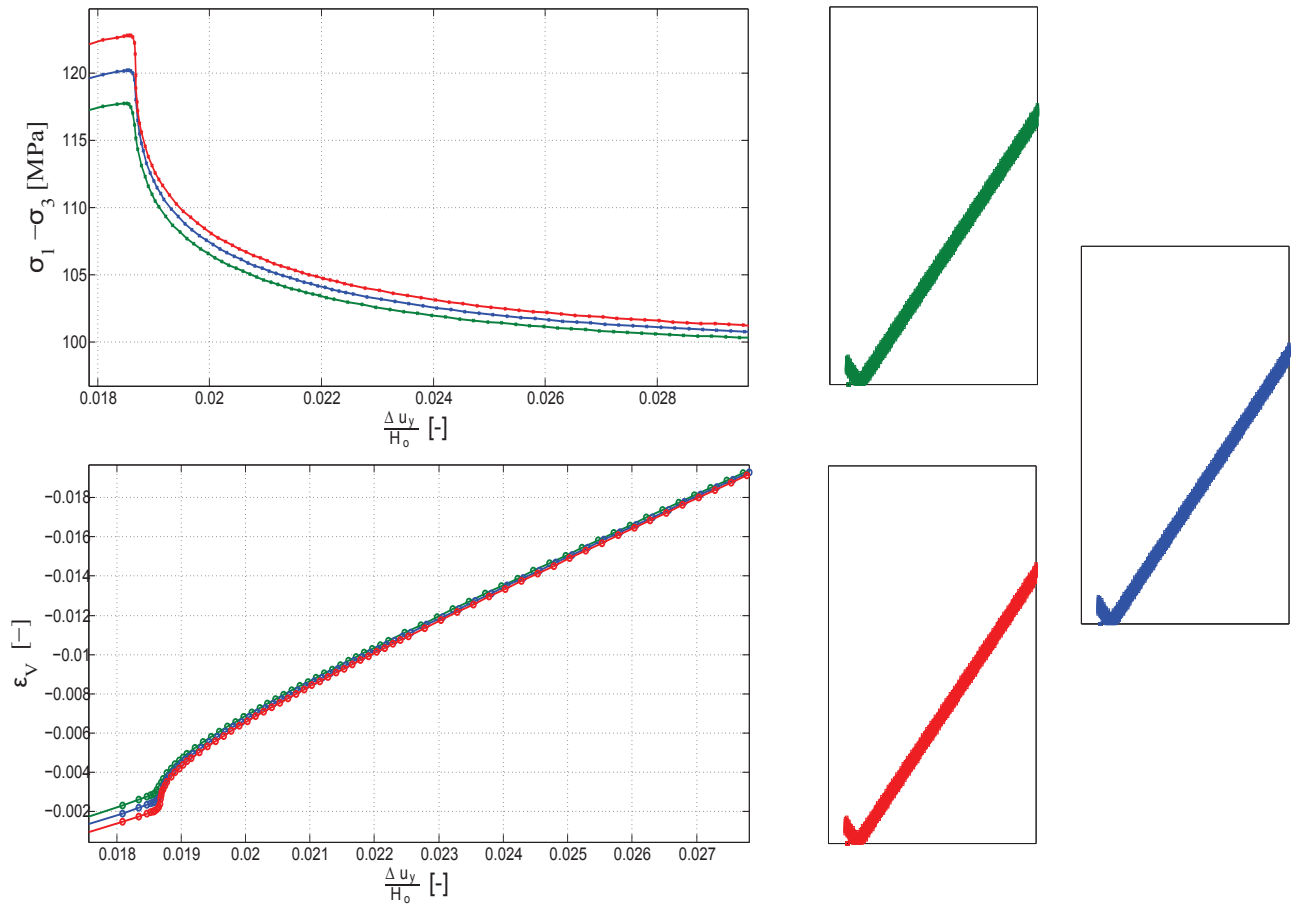


FIGURE 6.2 – Courbes de variation de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement des calculs qui visent à optimiser le pic. Le confinement imposé est de 20 MPa.



**FIGURE 6.3** – Zoom sur la courbe de contrainte et de la déformation volumique (régime post-pic) des calculs qui visent à optimiser le pic de contrainte. Les bandes de localisation (représentées à droite) correspondent au moment où la largeur de la bande est à son minimum.

La figure 6.3 montre que le palier de contrainte change légèrement à l'issue de la modification du pic. Nous remarquons que le palier a varié de seulement 1.5 MPa. Nous notons que les courbes de déformation volumique se superposent très bien. Pour résumer, le jeu de paramètres choisi (tableau 6.1) a permis de modifier le pic de contrainte en gardant le reste des observables quasi-inchangés.

### 6.3 Optimisation de la déformation axiale au pic

Comme le pic de contrainte, la déformation axiale au pic est très sensible à la cohésion finale et au frottement final. Cependant ces deux paramètres ne seront pas utilisés pour

l'optimisation en raison de leur grande influence sur le pic et le palier de contrainte. De ce fait, nous utiliserons là aussi pour l'optimisation de la déformation axiale  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$ . Le tableau 6.2 montre la combinaison de paramètres qui permet d'augmenter la déformation axiale au pic de 0.04%, sans apporter de modification aux autres observables.

	$\Delta Pic$ [MPa]	$\Delta Def$ [-]	$\Delta Larg$ [mm]	$\Delta Ori$ [°]	$\Delta Pal$ [MPa]
$\Delta\beta_c = 0.00214$	1.75	0.034%	-0.0044	0.033	1.75
$\Delta\beta_\varphi = 0.00057$	-1.75	0.0105%	0.034	0.0875	-0.14
Total	0	0.044%	0.029	0.012	1.61

**TABLE 6.2** – Modifications à apporter à  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$  afin d'augmenter la déformation axiale au pic de 0.04%

Nous avons effectué deux calculs nous permettant de vérifier que le jeu de paramètres utilisé (tableau 6.2) permet effectivement de modifier la déformation axiale sans changer de façon significative les autres observables. Le premier et le second calcul permettent respectivement d'augmenter et de réduire la déformation axiale au pic de la valeur souhaitée. Nous utilisons pour ces calculs les paramètres de référence en modifiant  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$ .

Nous présentons (figure 6.4) les résultats de l'optimisation de la déformation axiale au pic. La courbe de contrainte montre que la déformation au pic augmente et diminue d'environ 0.04% par rapport à la déformation axiale au pic du calcul de référence. La déformation axiale change sans que le pic de contraintes ne soit modifié. De plus, nous remarquons que le palier de contrainte est presque le même pour les trois calculs. Les trois courbes de déformation volumique se superposent très bien (mis à part le décalage du début de la localisation), ce qui permet de considérer qu'aucune modification significative n'a été apportée à ces courbes.

En traçant l'évolution de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement. Nous avons remarqué que le jeu de paramètres choisi permet de faire varier la déformation axiale au pic sans apporter de modification notable à la largeur et l'orientation de la bande (figure 6.5). Nous concluons de ces courbes qu'il est ainsi possible d'avancer ou de retarder l'initiation de la localisation.

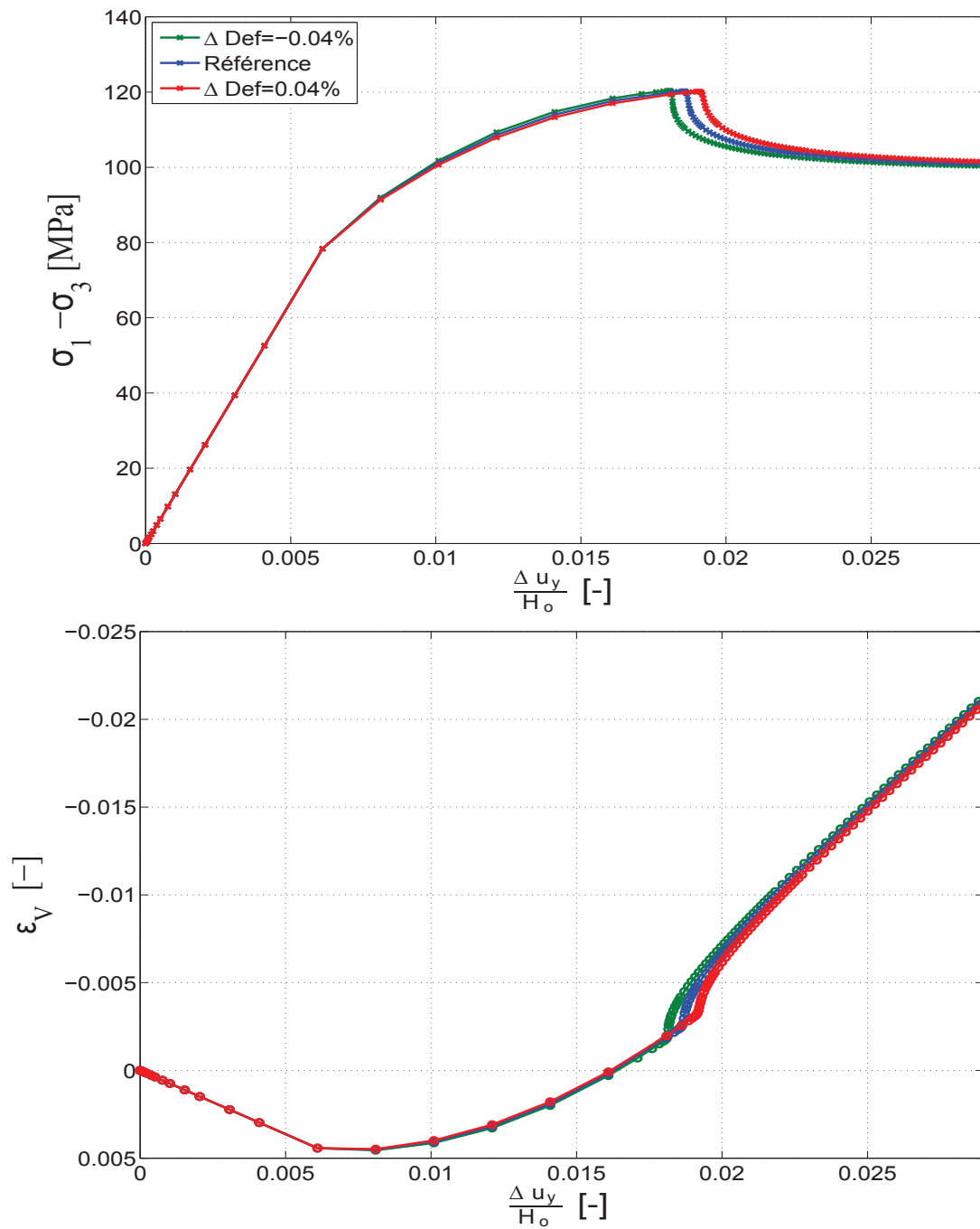


FIGURE 6.4 – Réponse mécanique des calculs qui visent à optimiser la déformation axiale. Le confinement imposé est de 20 MPa.

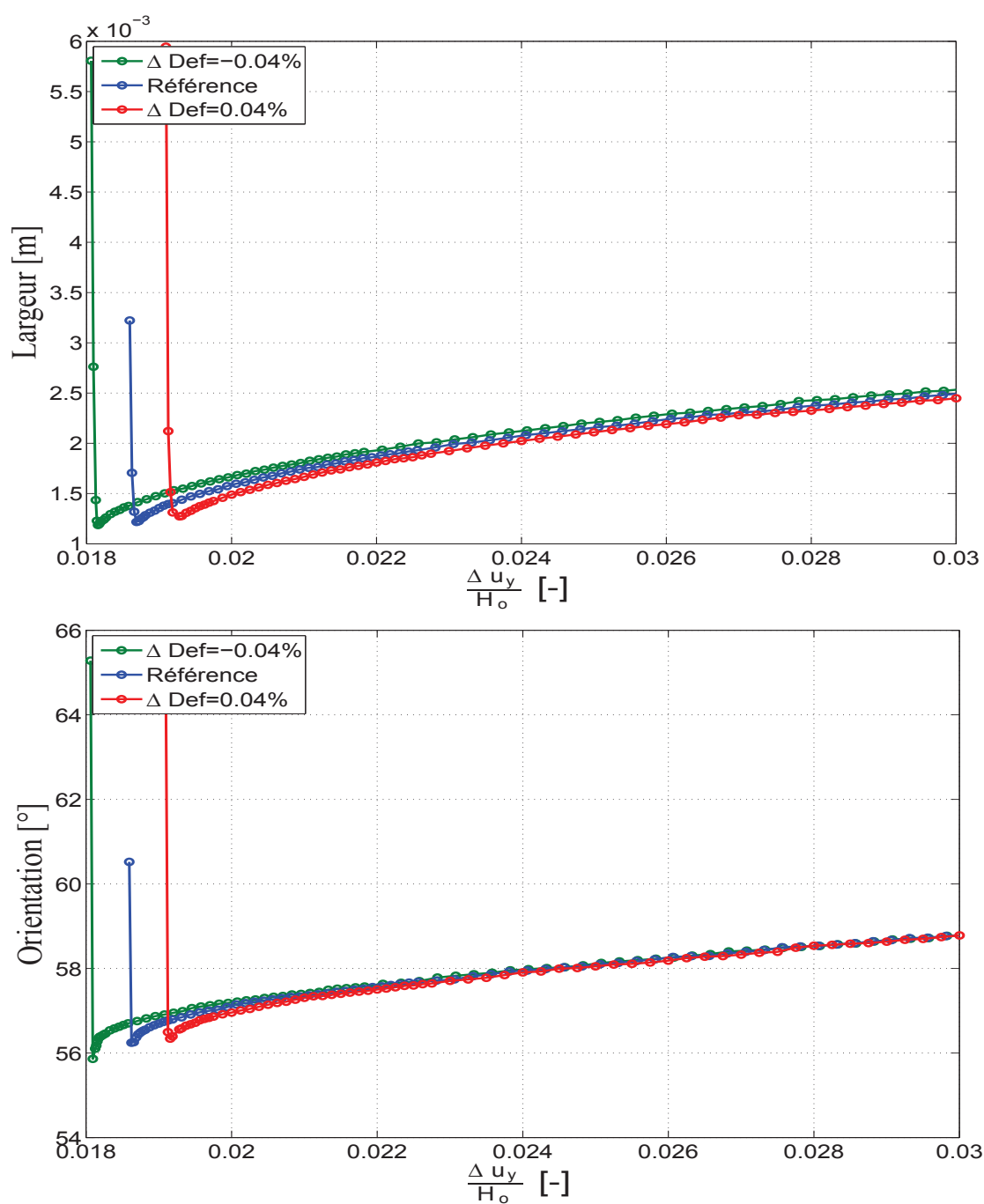
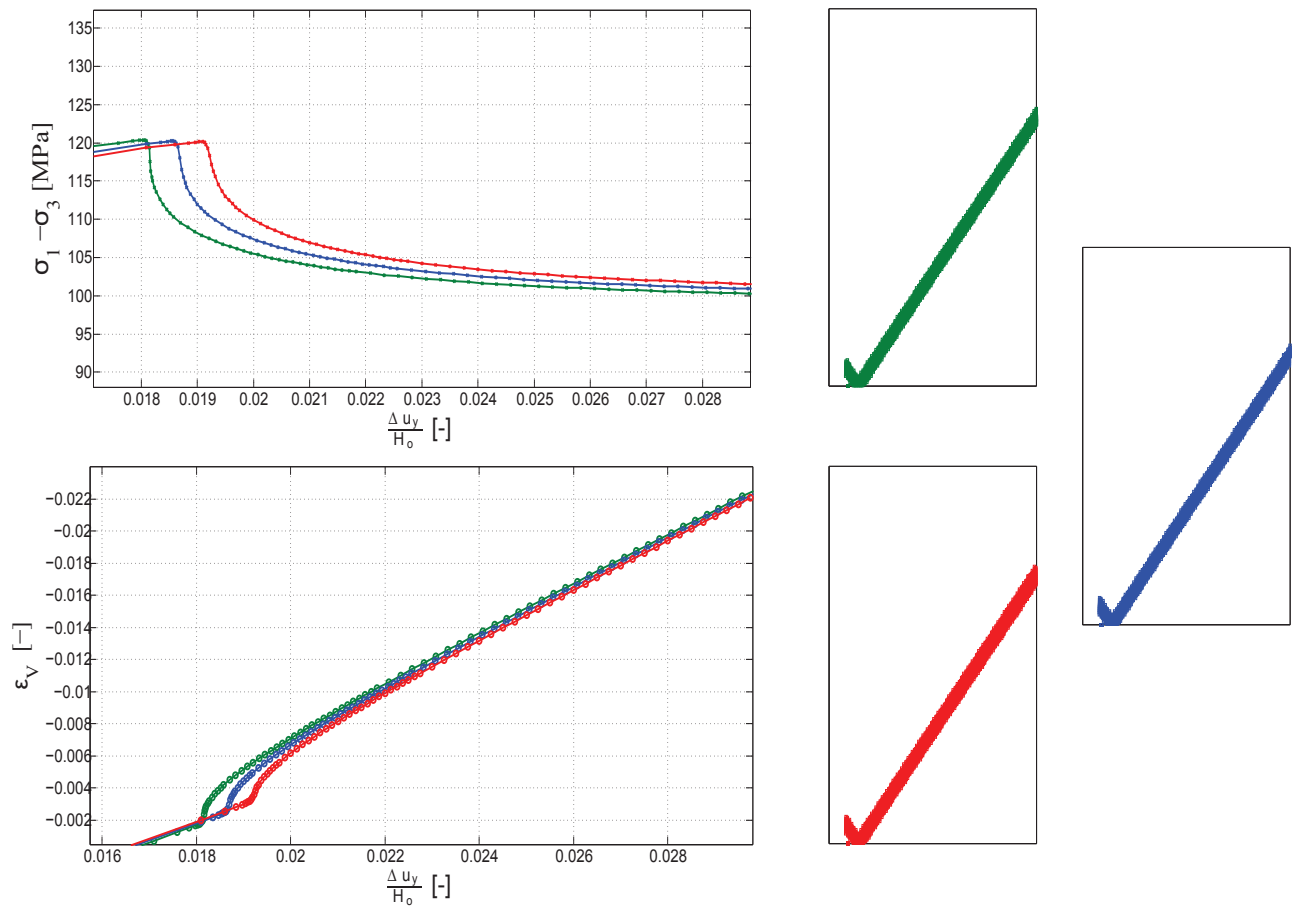


FIGURE 6.5 – Courbes de variation de la largeur et de l’orientation de la bande en fonction du raccourcissement pour les calculs qui visent à optimiser la déformation axiale. Le confinement imposé est de 20 MPa.





**FIGURE 6.6** – Zoom sur la courbe de contrainte et de la déformation volumique (régime post-pic) des calculs qui visent à optimiser la déformation axiale au pic. Les bandes de localisation (représentées à droite) correspondent au moment où la largeur de la bande est à son minimum.

La figure 6.6 indique que la déformation axiale au pic est modifiée sans que le pic de contrainte ne soit changé. Nous remarquons une légère variation du palier qui est de moins de 2 MPa. Les courbes de déformation volumique ne sont pas influencées par les variations de la déformation axiale au pic. Les résultats des calculs montrent clairement, qu'il est possible en utilisant les paramètres constitutifs  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$  d'optimiser la déformation axiale, sans apporter de changement significatif au reste des observables.

## 6.4 Optimisation du palier de contrainte

Nous proposons ici l'optimisation du palier de contrainte. Plusieurs paramètres peuvent être utilisés pour cette optimisation. Cependant nous avons choisi ceux qui nous permettent d'avoir un minimum d'influence sur les autres. Nous avons ainsi décidé d'utiliser les trois paramètres suivants pour l'optimisation du palier :  $\beta_c$ ,  $\beta_\varphi$  et  $c_f$ .

$c_f$  servira à modifier le palier, seulement cette modification entraîne des changements au niveau du pic de contrainte ainsi que la déformation axiale au pic.  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$  seront utilisés pour restaurer les valeurs de référence du pic et de la déformation avant modification du palier.

Le tableau 6.3 présente le jeu de paramètres que nous avons utilisé pour optimiser le palier. Nous effectuons deux calculs en plus du calcul de référence. Ces calculs ont pour objectifs de faire augmenter et diminuer le palier de contrainte de près de 3 MPa, tout en gardant les autres observables constants. Les résultats de cette optimisation sont montrés figure 6.7 et 6.8.

La réponse mécanique figure 6.7 montre que les courbes de chargement se superposent très bien, puis divergent après le pic au niveau du palier. Le palier de contrainte a donc été modifié sans que le pic de contrainte ainsi que la déformation au pic ne soient changés. La déformation volumique n'a pas non plus subi de modification suite à la variation du palier.

La figure 6.8 présente la variation de la largeur de la bande ainsi que son orientation en fonction du raccourcissement axial normalisé. Nous en déduisons qu'il est possible à partir du jeu de paramètres choisi d'apporter un changement au niveau du palier sans que la largeur de la bande et son orientation n'en soient affectées.

	$\Delta Pic$ [MPa]	$\Delta Def$ [-]	$\Delta Larg$ [mm]	$\Delta Ori$ [°]	$\Delta Pal$ [MPa]
$\Delta\beta_c = -0.00287$	-2.38	-0.0479%	0.00609	-0.0458	-0.448
$\Delta\beta_\varphi = -0.000386$	1.17	-0.00636%	-0.0227	-0.0582	0.094
$\Delta c_f = 0.721 MPa$	1.21	0.0542%	0.040	0.288	3.35
Total	0	0%	0.0233	0.0181	3

**TABLE 6.3** – Modifications à apporter à  $\beta_c$ ,  $\beta_\varphi$  et  $c_f$  afin d'augmenter le palier de contrainte de 3 MPa.

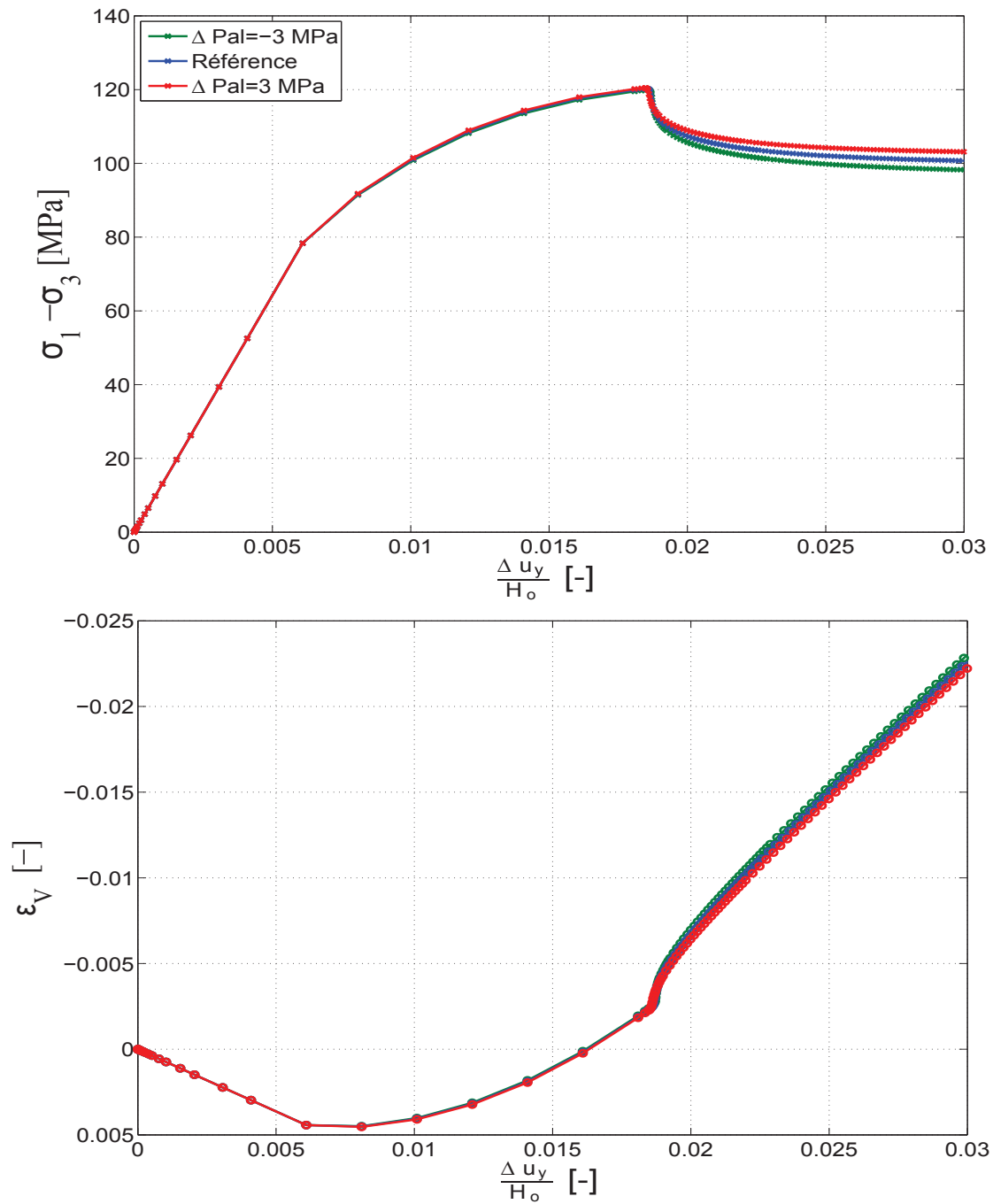


FIGURE 6.7 – Réponse mécanique des calculs qui visent à optimiser le palier de contrainte. Le confinement imposé est de 20 MPa.

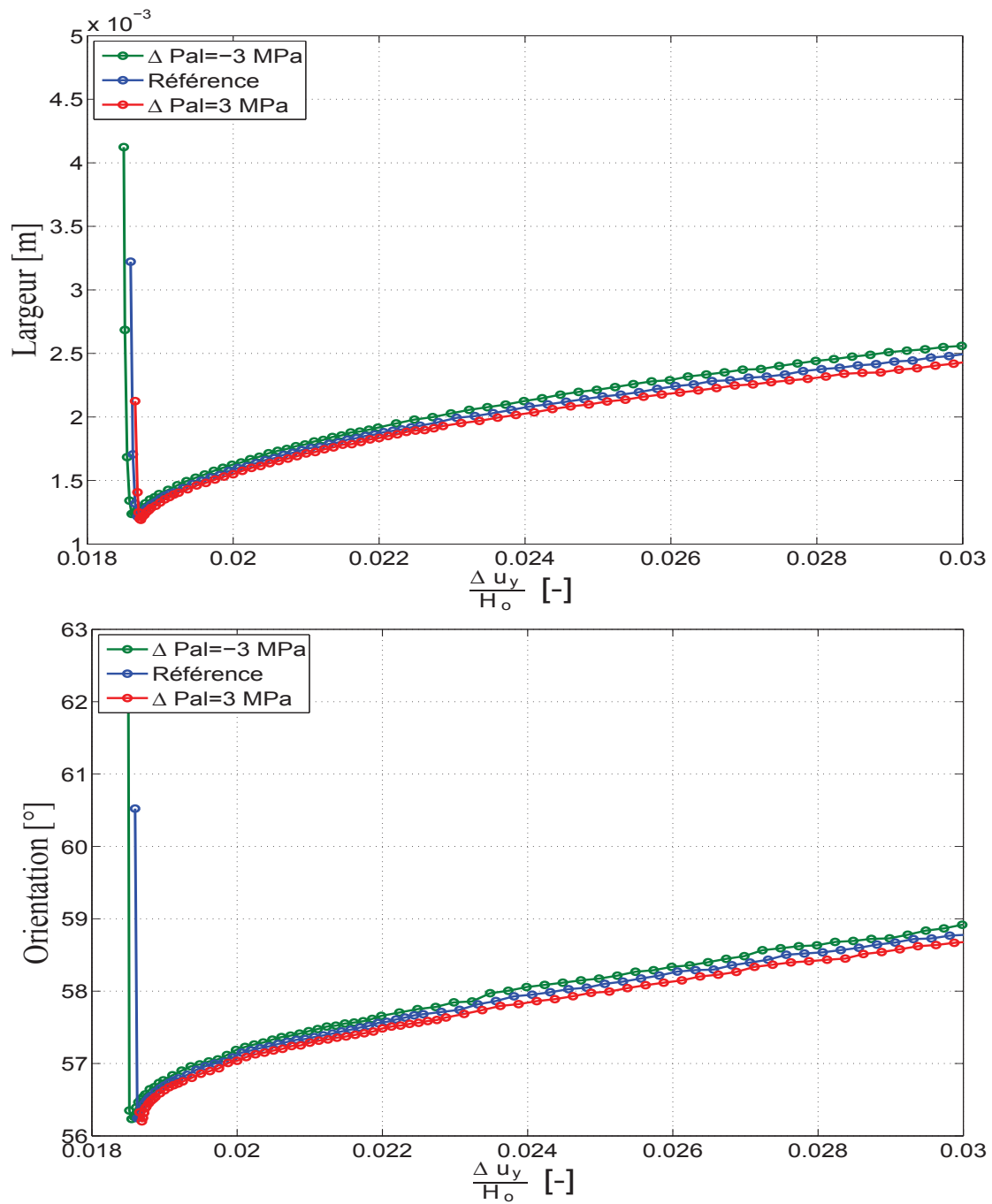
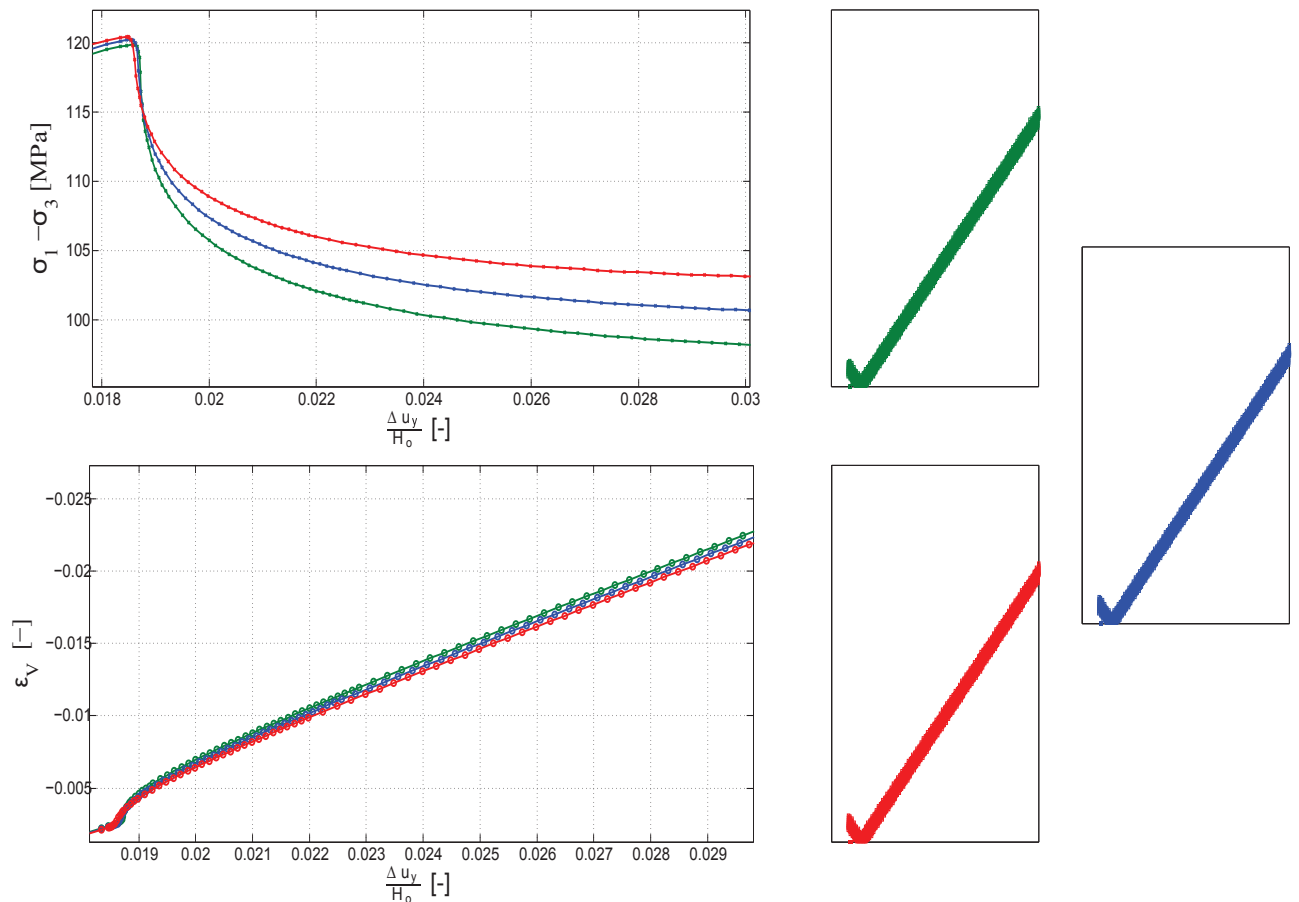


FIGURE 6.8 – Courbes de variation de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement pour les calculs qui visent à optimiser le palier de contrainte. Le confinement imposé est de 20 MPa



**FIGURE 6.9** – Zoom sur la courbe de contrainte et de déformation volumique (régime post-pic) des calculs qui visent à optimiser le palier de contrainte. Les bandes de localisation (représentées à droite) correspondent au moment où la largeur de la bande est à son minimum.

En effectuant un zoom sur la courbe de chargement et de déformation volumique (figure 6.9), nous remarquons que le palier de contrainte a effectivement été augmenté et diminué sans que le pic et la déformation axiale au pic ne changent. De plus nous constatons que la déformation volumique est quasiment la même malgré la modification du palier.

## 6.5 Optimisation de la largeur de bande

Nous visons à travers les calculs effectués dans cette section à optimiser la largeur de la bande. L'étude de sensibilité a montré que les paramètres qui avaient une influence

sur la pente de la courbe de chargement après le pic, avaient ainsi une influence sur la largeur de la bande. Nous avons expliqué cela par la relation entre la largeur de la bande et le déterminant du tenseur acoustique. Le paramètre auquel la largeur est toutefois la plus sensible est le paramètre second gradient  $D$ . Ce paramètre permet non seulement de faire varier la largeur, mais il a de plus peu d'effet sur les autres observables, notamment sur le palier de contrainte. A l'issue de la modification de  $D$ , nous utiliserons  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$  et  $c_f$ , pour rétablir les valeurs du pic, de la déformation axiale au pic et du palier de contrainte.

Nous avons choisi pour cette optimisation d'augmenter la largeur de la bande deux fois. Nous ne voulions pas la diminuer afin d'éviter d'avoir le phénomène de snapback. Le tableau 6.4, présente le premier calcul pour lequel nous voulions augmenter la largeur de la bande de près de 0.5 mm. Nous retrouvons au tableau 6.5, le deuxième calcul qui vise à accroître la largeur d'environ 1.5 mm.

	$\Delta Pic$ [MPa]	$\Delta Def$ [-]	$\Delta Larg$ [mm]	$\Delta Ori$ [°]	$\Delta Pal$ [MPa]
$\Delta\beta_c = 0.00168$	1.40	0.0278%	-0.00358	0.0269	0.263
$\Delta\beta_\varphi = -0.000166$	-0.5049	0.00263%	0.0978	0.0252	-0.0405
$\Delta c_f = -0.605 MPa$	-1.031	-0.0457%	-0.0335	-0.167	-2.82
$\Delta D = 2N$	0.131	0.0147%	0.526	0.379	2.53
Total	-0.1045	0%	0.491	0.263	-0.0675

**TABLE 6.4** – Modifications à apporter à  $\beta_c$ ,  $\beta_\varphi$ ,  $c_f$  et  $D$  afin d'augmenter la largeur de la bande de 0.5 mm.

	$\Delta Pic$ [MPa]	$\Delta Def$ [-]	$\Delta Larg$ [mm]	$\Delta Ori$ [°]	$\Delta Pal$ [MPa]
$\Delta\beta_c = 0.00421$	3.51	0.0696 %	-0.00895	0.0673	0.657
$\Delta\beta_\varphi = -0.000416$	-1.26	0.00657%	0.244	0.0631	-0.1012
$\Delta c_f = -1.51 MPa$	-2.57	-0.114%	-0.0538	-0.418	-7.061
$\Delta D = 5N$	0.328	0.038%	1.315	0.949	6.32
Total	0.008	0.00017%	1.49	0.661	-0.185

**TABLE 6.5** – Modifications à apporter à  $\beta_c$ ,  $\beta_\varphi$ ,  $c_f$  et  $D$  afin d'augmenter la largeur de la bande de 1.5 mm.

La figure 6.10 montre la réponse mécanique des calculs effectués pour optimiser la largeur de la bande. La courbe de chargement indique que le pic et le palier de contrainte ainsi que la déformation axiale au pic ne sont pas affectés par les variations de la largeur. De plus, en dépit des changements apportés à la largeur de la bande, les déformations volumiques restent les mêmes. La largeur de la bande augmente significativement sans que nous n'observions d'effets sur son orientation (figure 6.11).

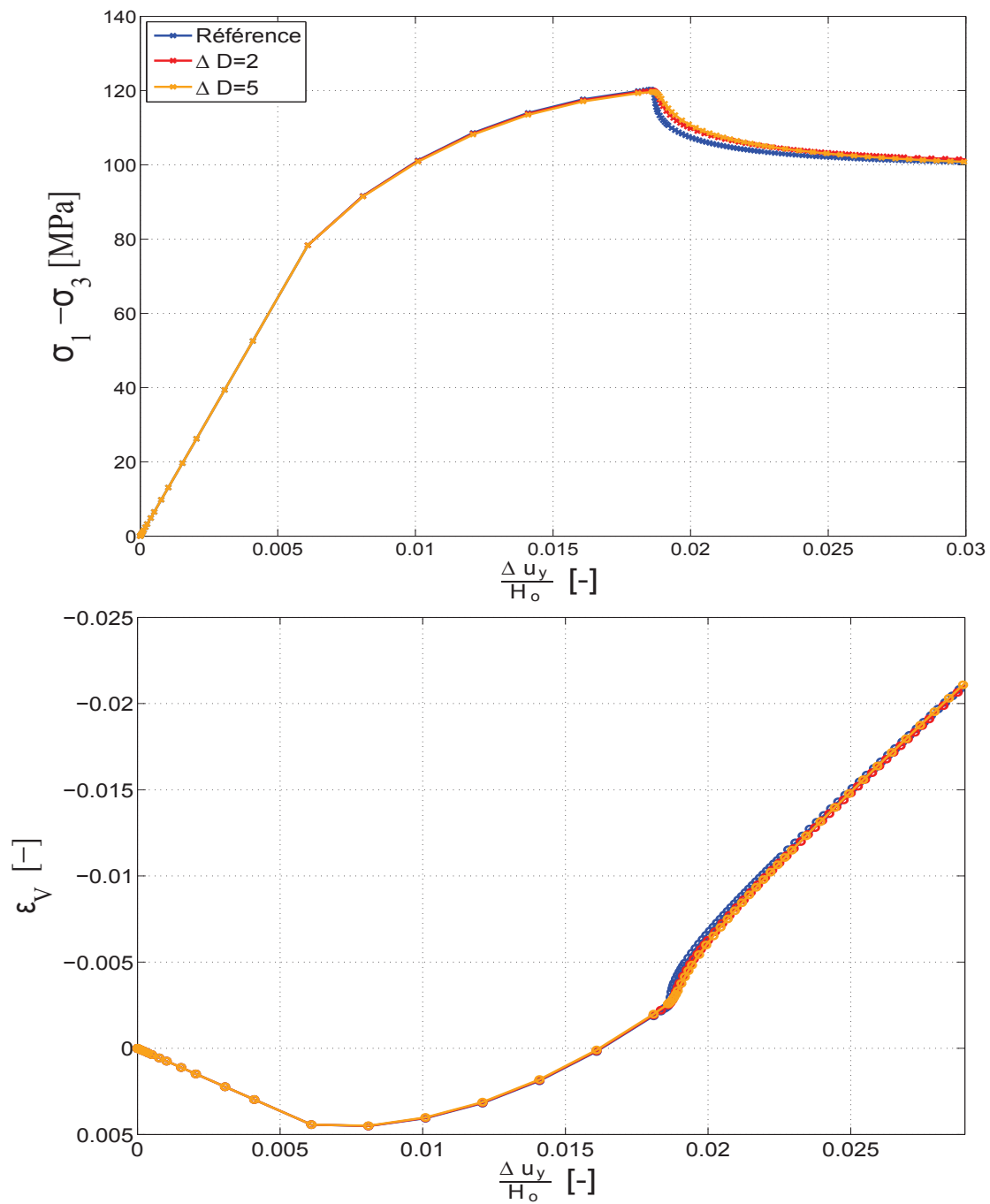


FIGURE 6.10 – Réponse mécanique des calculs qui visent à optimiser la largeur de bande. Le confinement imposé est de 20 MPa

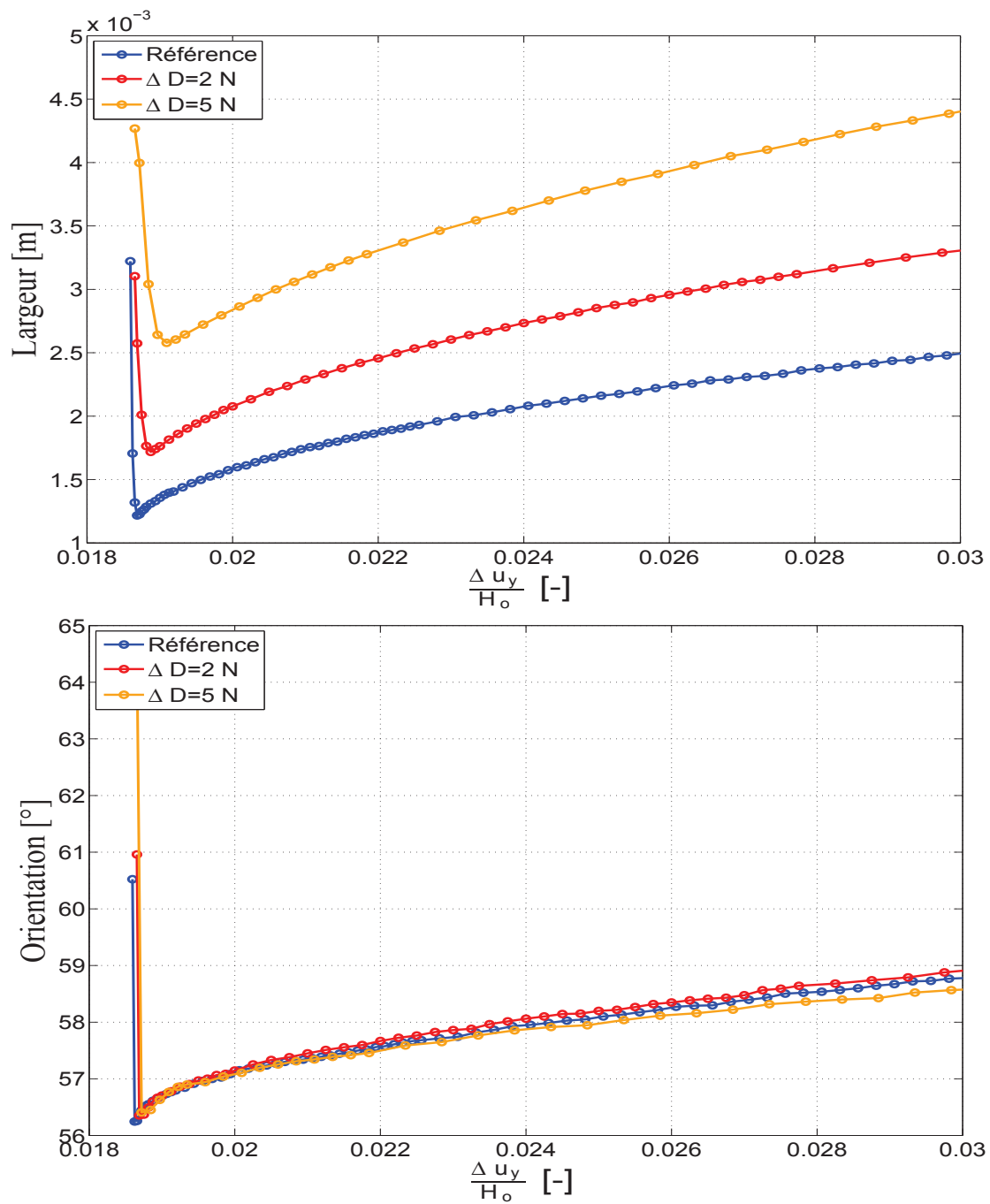
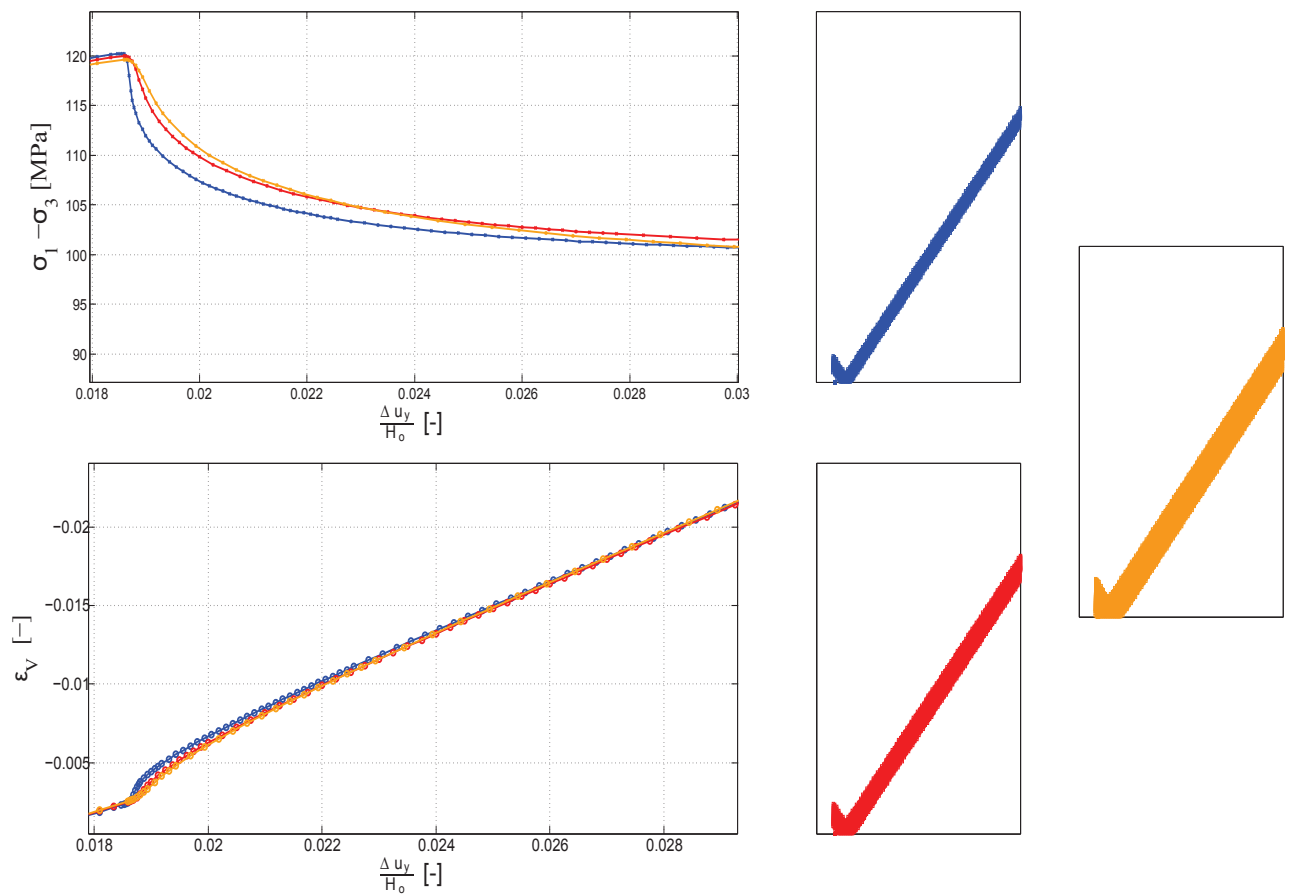


FIGURE 6.11 – Courbes de variation de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement pour les calculs qui visent à optimiser la largeur de bande. Le confinement imposé est de 20 MPa.





**FIGURE 6.12** – Zoom sur la courbe de contrainte et de déformation volumique (régime post-pic) des calculs qui visent à optimiser la largeur de bande. Les bandes de localisation correspondent au moment où la largeur de la bande est à son minimum

En effectuant un zoom sur la courbe de contrainte et de déformation volumique (figure 6.12), nous notons que le radoucissement après le pic décroît avec la largeur de la bande, bien que le pic, la déformation axiale au pic et le palier soient inchangés. La déformation volumique n'a pas été modifiée suite à l'augmentation de  $D$ . Les points en charge plastique (à droite) indiquent l'élargissement de la bande.

Les résultats que nous avons présentés montrent qu'il est possible d'optimiser la largeur de la bande sans affecter le reste des observables.

## 6.6 Optimisation de la déformation volumique

Nous proposons dans cette section une optimisation la déformation volumique. Parmi tous les paramètres constitutifs de la loi Plasol, l'angle de dilatance est le paramètre qui a bien évidemment le plus d'impact sur celle-ci. Nous avons donc décidé de l'utiliser pour l'optimisation. La modification de  $\Psi$  conduit à une variation du pic et du palier de contrainte ainsi que de la déformation axiale au pic. Les variations de  $\Psi$  que nous avons choisies pour l'optimisation, induisent un faible changement du palier de contrainte de l'ordre de 3 MPa. Quant au pic et la déformation axiale au pic, ils seront corrigés grâce aux paramètres  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$ . Le tableau 6.6 présente les variations à apporter aux paramètres de référence pour augmenter la dilatance dans l'échantillon.

Nous montrons sur les figures 6.13 et 6.14 les résultats des calculs qui ont permis d'optimiser la déformation volumique. Nous proposons d'augmenter la dilatance dans l'échantillon et de la diminuer. La courbe de chargement montre que le jeu de paramètres utilisé pour les calculs n'a pas d'effet sur le pic de contrainte et la déformation axiale au pic. Toutefois, nous remarquons une faible modification au niveau du palier mais qui reste toutefois peu significative et qui pourrait être corrigée en utilisant le jeu de paramètre donné (tableau 6.3). En augmentant  $\Psi$  de 1.5 ° nous remarquons une augmentation importante du régime dilatant.

Les courbes d'évolution de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement (figure 6.14) indiquent que la largeur de la bande n'est pas influencée par la variation de la déformation volumique. Cependant nous remarquons qu'en augmentant  $\Psi$  de 3° nous augmentons l'orientation de la bande de 2°. Cette variation n'est pas très importante étant donné la dispersion de la mesure expérimentale concernant l'orientation de la bande. Mais cela indique que l'optimisation de la déformation volumique doit être effectuée avec précaution au risque de modifier de manière significative l'orientation de la bande.

	$\Delta Pic$ [MPa]	$\Delta Def$ [-]	$\Delta Larg$ [mm]	$\Delta Ori$ [°]	$\Delta Pal$ [MPa]
$\Delta\beta_c = 0.002023$	1.68	0.0337%	-0.00430	0.0323	0.316
$\Delta\beta_\varphi = 0000556$	-1.69	0.00912%	0.0327	0.0843	-0.135
$\Delta\Psi = 1.5^\circ$	0.228	-0.428%	0.0165	0.0857	1.16
Total	0	0%	0.0449	0.973	1.34

**TABLE 6.6** – Modifications à apporter à  $\beta_c$ ,  $\beta_\varphi$  et  $\Psi$  afin d'optimiser la déformation volumique

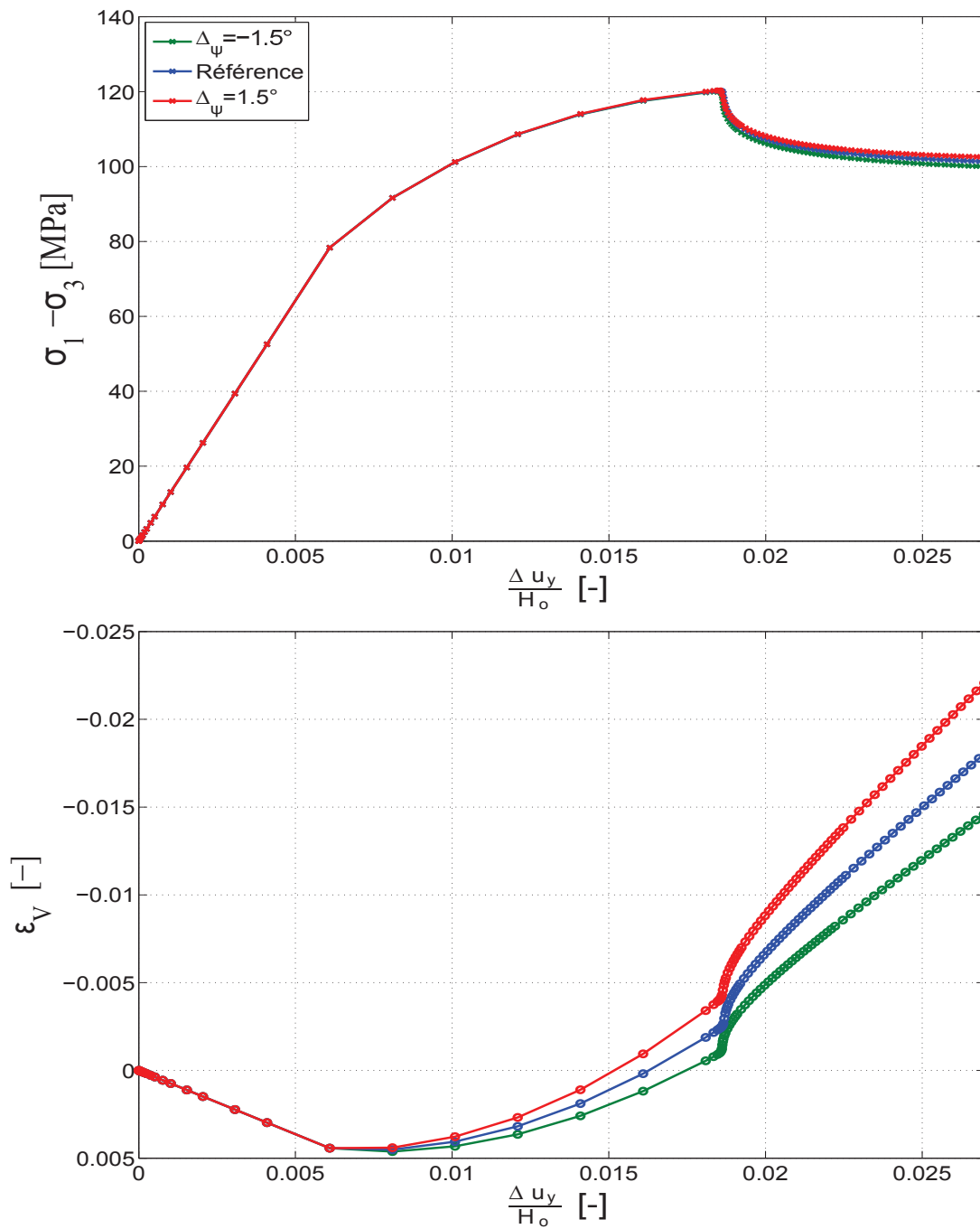


FIGURE 6.13 – Réponse mécanique des calculs qui visent à optimiser la déformation volumique. Le confinement imposé est de 20 MPa.

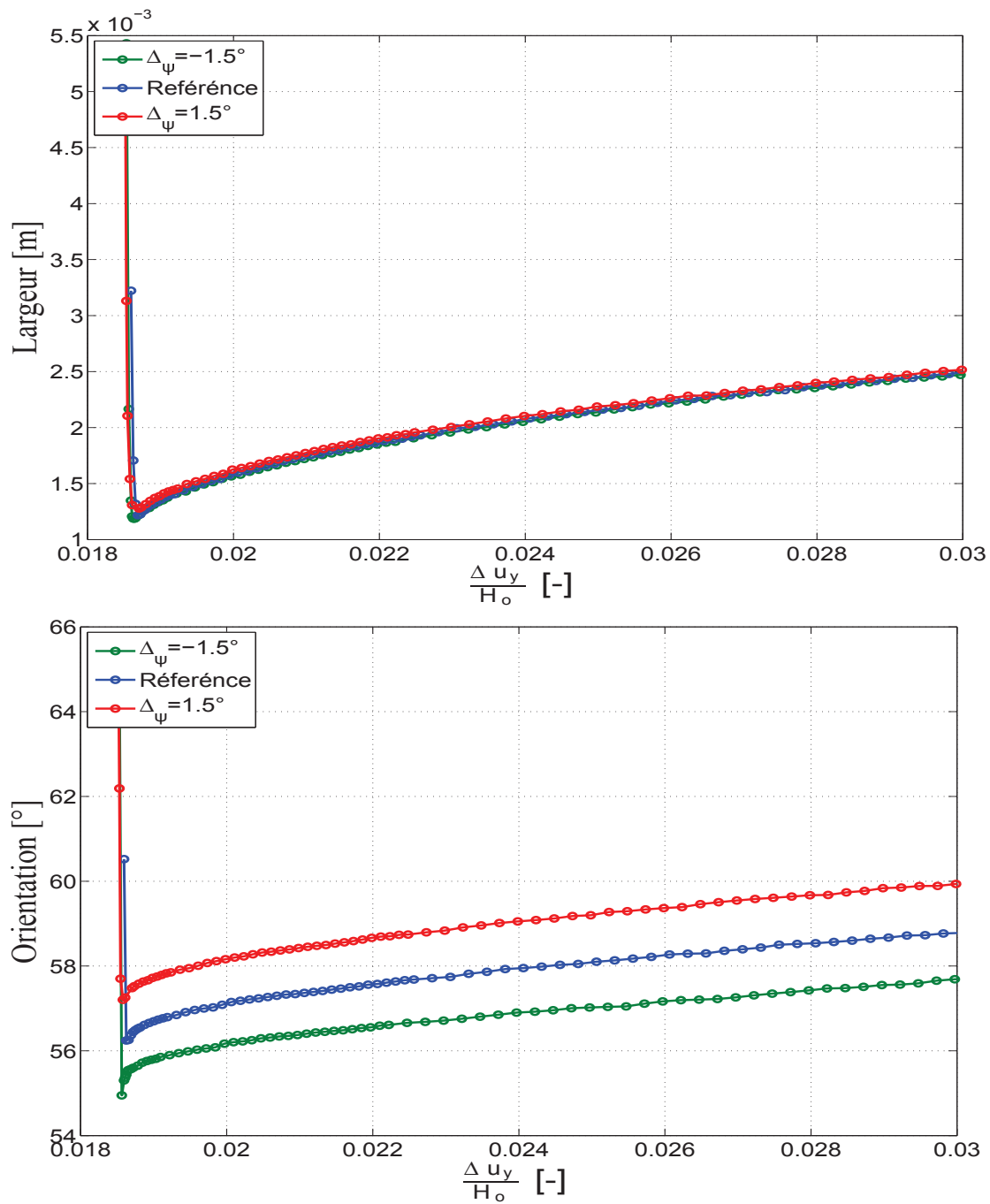
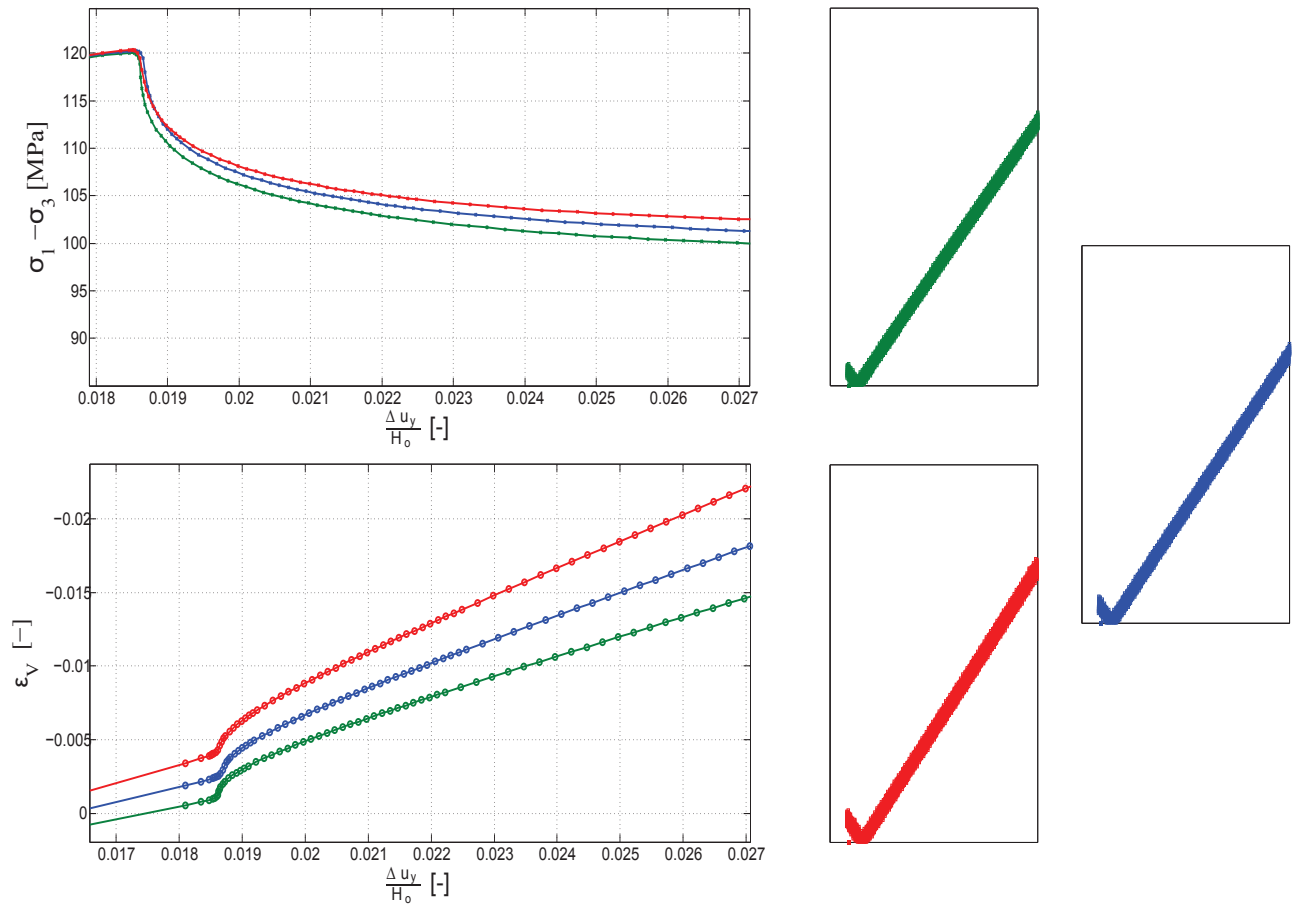


FIGURE 6.14 – Courbes de variation de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement pour les calculs qui visent à optimiser la déformation volumique. Le confinement imposé est de 20 MPa.



**FIGURE 6.15** – Zoom sur la courbe de contrainte et de déformation volumique (régime post-pic) des calculs qui visent à optimiser la déformation volumique. Les bandes de localisation correspondent au moment où la largeur de la bande est à son minimum

Un zoom sur la réponse mécanique (figure 6.15), révèle que le palier de contrainte a effectivement été modifié. La variation de  $\Psi$  de  $3^\circ$  a fait varier le palier de près de 2.6 MPa. Nous remarquons sur les courbes de déformation volumique que la dilatance croît significativement après le pic de contrainte.

### Remarque générale

Nous n'avons pas utilisé pour l'optimisation des observables la matrice de sensibilité calculée au chapitre précédent, l'optimisation a été effectuée de façon manuelle. En effet, au moment où nous avons fait l'optimisation, nous ne disposions pas de la matrice de sensibilité complète. Néanmoins, cette matrice peut tout à fait être utilisée. Pour donner un exemple, supposons que nous voulions modifier le pic de contrainte de 2

MPa, pour les deux confinements à 20 et 30 MPa, dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} \Delta Pic_{20}[MPa] \\ \Delta Def_{20}[-] \\ \Delta Pal_{20}[MPa] \\ \Delta Pic_{30}[MPa] \\ \Delta Def_{30}[-] \\ \Delta Pal_{30}[MPa] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

En utilisant l'inverse de la matrice de sensibilité nous obtenons les variations à apporter aux paramètres  $\beta_c$ ,  $\beta_\varphi$ ,  $c_f$ ,  $\varphi$ ,  $D$ ,  $\Psi$ , pour varier le pic de contrainte. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \Delta\beta_c[-] \\ \Delta\beta_\varphi[-] \\ \Delta c_f[MPa] \\ \Delta\varphi_f[MPa] \\ \Delta D[N] \\ \Delta\Psi[Degres] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0096 \\ -0.00067 \\ 6.37 \\ -3.11 \\ -4.21 \\ 0.18 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

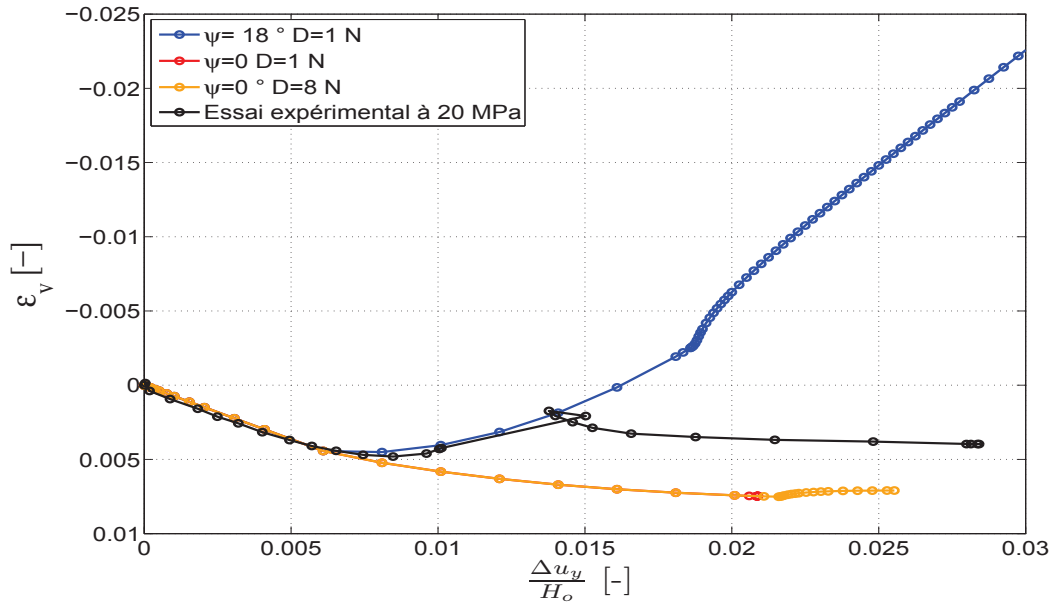
Les résultats montrent que pour varier le pic de contrainte de 2 MPa, pour les deux confinements, il faut varier la cohésion finale de près de  $\frac{2}{3}$  de sa valeur initiale ( $c_f = 9.6$  MPa). Cette variation est assez importante et étant donné que la réponse du matériau est non linéaire, il y a un risque de modifier fortement son comportement. Selon notre expérience numérique, nous pensons qu'il est préférable de réduire le nombre de paramètres constitutifs pour l'optimisation des observables. Par exemple,  $\beta_c$  et  $\beta_\varphi$  pourront être utilisés pour l'optimisation du pic et de la déformation axiale au pic, c'est ce que nous avons proposé ici.

## 6.7 Problématique liée à un angle de dilatance constant

Nous nous sommes heurté à une difficulté en voulant reproduire les courbes de déformation volumique expérimentales. En effet, dans les calculs numériques nous observons que la déformation volumique continue d'augmenter après la localisation, alors que dans l'essai expérimental la déformation volumique ne varie plus ou peu après le pic de contrainte figure 6.16. Cette augmentation de la déformation volumique au cours du calcul s'explique par le fait que dans la loi Plasol, l'angle de dilatance  $\Psi$  est défini par défaut comme constant. De ce fait la déformation volumique continue d'augmenter. Une des solutions possibles serait de prendre un angle de dilatance nul pour les calculs.

La figure 6.16 montre les résultats des calculs effectués avec  $\Psi=0^\circ$ . Le calcul avec un angle de dilatance nul et  $D = 1N$  ne converge pas, il présente du snapback. Nous avons

donc pris une valeur de  $D = 8N$  pour être certain de passer le snapback ; l'objectif étant de voir la déformation volumique pour un angle de dilatance nul. Les résultats montrent qu'en utilisant  $\Psi=0^\circ$  nous obtenons une déformation volumique qui est nulle après le pic de contrainte. Cependant nous n'avons pas non plus de dilatance avant le pic. D'une part nous nous approchons de la courbe de déformation volumique (après le pic) mais d'autre part, la différence entre l'essai numérique et l'essai expérimental est plus importante avant le pic. Nous en déduisons, qu'il n'est pas judicieux d'utiliser un angle de dilatance constant et nul, mais plus tôt un angle de dilatance variable, de sorte que cet angle soit important avant le pic, puis décroisse et s'annule peu après le pic.



**FIGURE 6.16** – Comparaison entre la déformation volumique de l'essai numérique et celle de l'essai expérimental pour un confinement de 20 MPa

Une méthode est déjà implémentée dans le code de calcul Lagamine pour faire varier l'angle de dilatance [4]. Cette méthode permet de varier  $\Psi$  en fonction du frottement mobilisé  $\varphi$  en utilisant la règle de Taylor [95], que nous rappelons ci-dessous :

$$\varphi - \Psi = \text{constante} \quad (6.3)$$

L'inconvénient de cette méthode est le fait que  $\Psi$  aura la même tendance que le frottement. Puisque que nous avons du durcissement, dans notre cas le frottement augmente. Le paramètre  $\Psi$  va donc augmenter alors que notre objectif est de le diminuer. Pour cette raison nous avons implémenté dans le code une nouvelle façon de modifier l'angle de dilatance. Celle-ci est présentée dans la prochaine section.

## 6.8 Solution proposée pour l'angle de dilatance

En raison des difficultés rencontrées et qui sont liées à l'utilisation d'un angle de dilatance constant, nous avons choisi de faire varier ce paramètre avec une loi d'évolution semblable à celle pour la cohésion et le frottement,  $\Psi$  évoluera donc de manière hyperbolique en fonction de la déformation plastique équivalente. Pour cela, nous introduisons trois nouveaux paramètres dans la loi Plasol ( $\Psi_i$ ,  $\Psi_f$ ,  $\beta_\Psi$  et  $DEC_\Psi$ ). Le paramètre  $\Psi_i$  représente l'angle de dilatance initial et  $\Psi_f$  l'angle de dilatance final. Quand la déformation plastique équivalente  $\varepsilon_{eq}^p$  est égale à  $\beta_\Psi$ , cela voudra dire que  $\Psi$  a diminué de la moitié (valeur moyenne entre  $\Psi_i$  et  $\Psi_f$ ).  $DEC_\Psi$  permet de retarder la variation de l'angle de dilatance. Si  $DEC_\Psi$  vaut 0 l'angle de dilatance varie dès que le calcul rentre en plasticité. L'expression 6.4 montre la relation entre l'angle de dilatance et la déformation plastique équivalente :

$$\Psi = \Psi_i + \frac{(\Psi_f - \Psi_i)(\varepsilon_{eq}^p - DEC_\Psi)}{\beta_\Psi + (\varepsilon_{eq}^p - DEC_\Psi)} \quad (6.4)$$

Nous avons testé la méthode sur un essai homogène avant de l'adopter pour un calcul hétérogène qui présente de la localisation de la déformation.

Nous allons comparer deux calculs. Pour le premier nous avons utilisé un angle de dilatance constant et pour le deuxième un angle de dilatance variable. Nous choisissons pour ce dernier de ne pas mettre de retard entre la diminution de  $\Psi$  et le début de la réponse mécanique, l'angle de dilatance commence à varier dès que les déformations sont plastiques. Ces calculs sont effectués avec un confinement de 20 MPa.

P	E	$\nu$	$c_i$	$c_f$	$\varphi_i$	$\varphi_f$	$\beta_c$	$\beta_\varphi$	$\Psi$
20 MPa	13.2 GPa	0.215	32.5 MPa	9.6 MPa	4°	21°	0.005	0.001	18°

TABLE 6.7 – Paramètres utilisés pour le calcul effectué avec un angle de dilatance constant

P	E	$\nu$	$c_i$	$c_f$	$\varphi_i$	
20 MPa	13.2 GPa	0.215	32.5 MPa	9.6 MPa	4°	
$\varphi_f$	$\beta_c$	$\beta_\varphi$	$\Psi_i$	$\Psi_f$	$\beta_\Psi$	$DEC_\Psi$
21°	0.005	0.001	18°	0°	0.001	0

TABLE 6.8 – Paramètres utilisés pour le calcul effectué avec un angle de dilatance variable.

La figure 6.17 montre les courbes de chargement pour deux calculs effectués avec  $\Psi$  constant et  $\Psi$  variable. Ces courbes montrent qu'en utilisant un angle de dilatance qui diminue nous réduisons le pic de contrainte. Ceci est normal puisque  $\Psi$  va commencer à diminuer en plasticité, au niveau du pic il aura une valeur inférieure à celle définie



pour le calcul avec un angle de dilatance constant. Par ailleurs, nous savons qu'en diminuant l'angle de dilatance, nous diminuons le pic. Le palier de contrainte subit une légère modification suite à la variation de l'angle de dilatance.

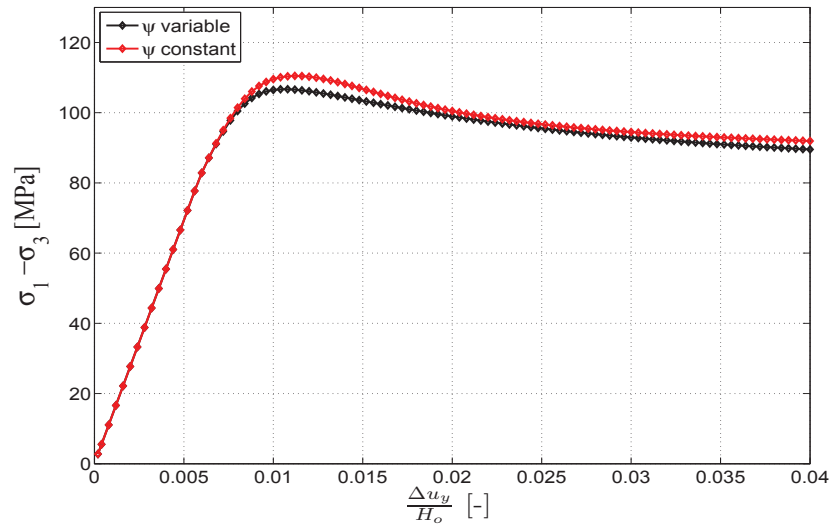


FIGURE 6.17 – Courbes de chargement pour les calculs effectués avec un angle de dilatance constant et un angle de dilatance variable pour un confinement de 20 MPa.

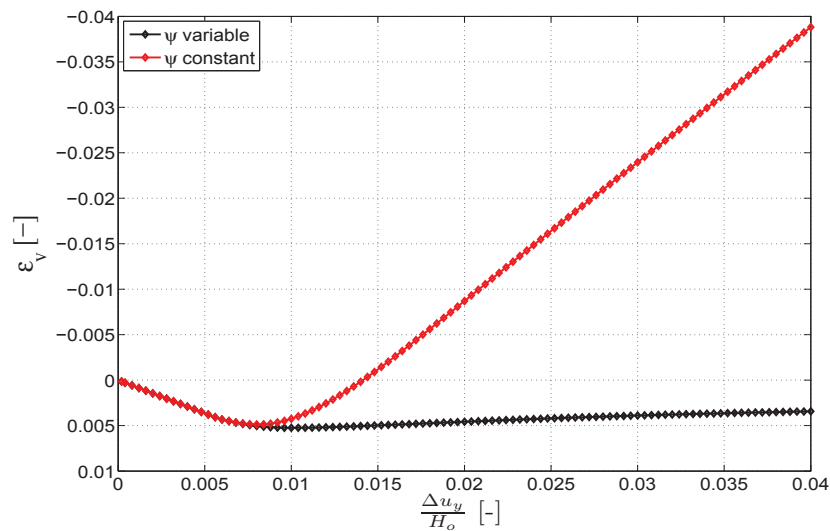
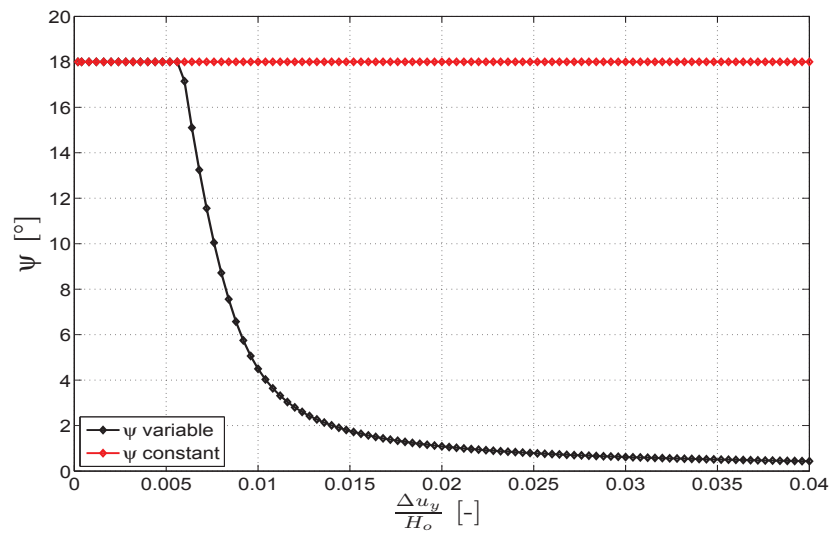


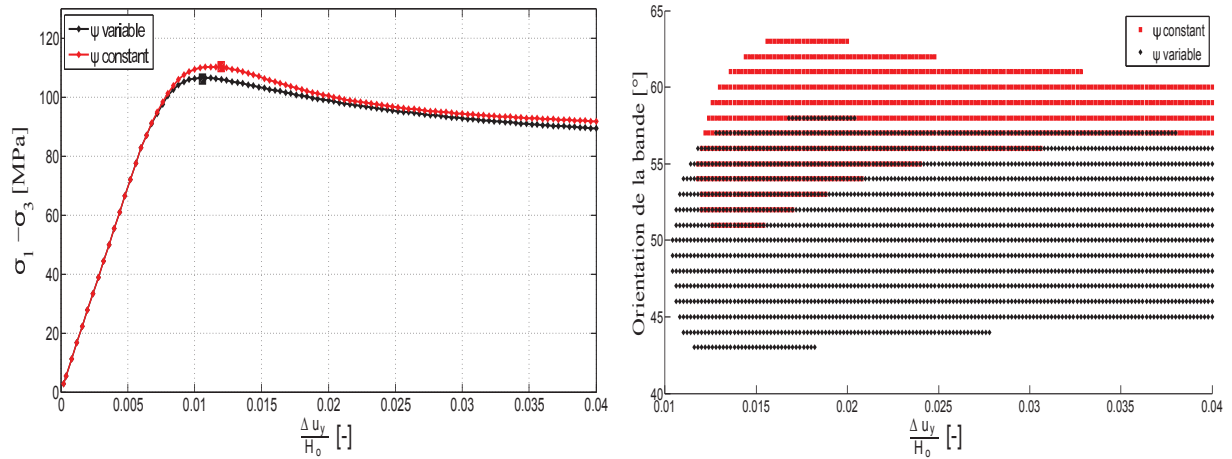
FIGURE 6.18 – Courbes de déformation volumique pour les calculs effectués avec un angle de dilatance constant et un angle de dilatance variable



**FIGURE 6.19** – Courbes de variation de  $\Psi$  pour les calculs effectués avec un angle de dilatance constant et un angle de dilatance variable, pour un confinement de 20 MPa.

Nous remarquons la grande différence entre les courbes de déformation volumique pour un calcul avec une dilatance constante et un calcul où l'angle de dilatance tend vers  $0^\circ$ . Les deux courbes se superposent très bien au départ puis, commencent à diverger peu avant le pic de contrainte. Nous déduisons de ces résultats qu'il est possible de mieux se rapprocher des courbes de déformation volumique en utilisant un angle de dilatance variable.

Nous avons représenté les valeurs de  $\Psi$  au cours du calcul en fonction du raccourcissement axial normalisé afin de juger de l'évolution hyperbolique de  $\Psi$ . (figure 6.19).



**FIGURE 6.20** – Comparaison de l'éventail des orientations de bande donné par le critère de bifurcation pour un calcul avec un angle de dilataance constant et un calcul avec un angle de dilataance variable. Les carrés sur les courbes de chargement représentent le moment où le critère de bifurcation est satisfait

Nous avons voulu voir l'effet du changement de l'angle de dilataance au cours du calcul sur les orientations de bande que prévoit le critère de bifurcation. Nous avons pour cela tracé les orientations de bande en fonction du raccourcissement pour nos deux calculs. Nous remarquons tout d'abord que le critère est retardé dans le cas du calcul avec un angle de dilataance variable. Nous notons aussi que l'éventail des orientations possibles est plus large dans le cas du calcul avec  $\Psi$  variable. De plus les valeurs de l'orientation sont plus importantes dans ce cas de figure. Les résultats de cette étude de bifurcation montre qu'après que le critère de Rice [84] soit satisfait pour la première fois, la bande aura plus de possibilités de changer d'orientation pour un calcul avec un angle de dilataance variable par rapport à un calcul où l'angle de dilataance est constant.

Nous avons effectué une étude de sensibilité sur les paramètres liés à l'angle de dilataance afin d'évaluer leur influence sur le pic et le palier de contrainte, la déformation volumique ainsi que le seuil de localisation au pic. Tous les calculs sont faits avec un seul élément (calculs homogènes). Les paramètres présentés au tableau 6.8 serviront comme référence pour l'étude de sensibilité. La méthode utilisée pour cette étude de sensibilité est celle que nous avons utilisée auparavant. Chacun des paramètres définis pour la variation de l'angle de dilataance sera modifié 5 fois, en gardant le reste des paramètres de la loi constant, ainsi nous évaluons l'influence de ce paramètre sur la réponse mécanique de l'échantillon. La courbe bleue représente le calcul effectué avec les paramètres de référence.

Nous présentons sur la figure 6.21 les résultats de l'étude de sensibilité effectuée sur  $\beta_{\Psi}$  (pour la réponse homogène). Cette étude montre que ce paramètre a très peu d'impact sur le pic et le palier de contrainte. Cependant, en augmentant  $\beta_{\Psi}$  on remarque que

l'angle de dilatance varie plus lentement en fonction du raccourcissement. Pour un raccourcissement axial normalisé de 0.04 et  $\beta_\Psi = 0.004$  l'angle de dilatance vaut  $1.5^\circ$ , alors que pour le même raccourcissement et  $\beta_\Psi = 0.0025$  l'angle de dilatance vaut  $0.1^\circ$ . Cette différence d'évolution de la dilatance est bien visible sur les courbes de déformation volumique. Nous remarquons qu'en augmentant  $\beta_\Psi$  la dilatance augmente de manière significative.

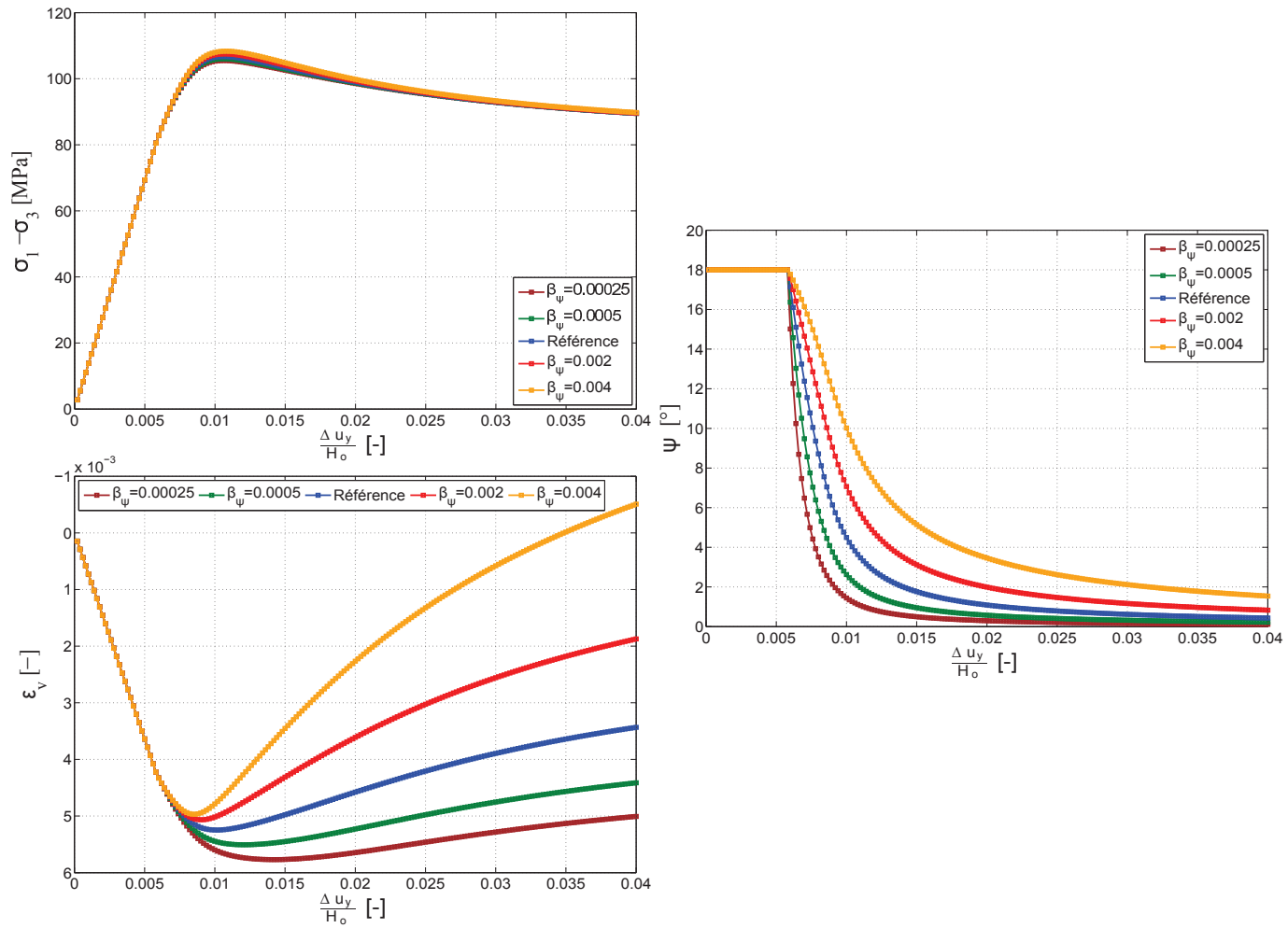


FIGURE 6.21 – Étude de sensibilité sur  $\beta_\Psi$ , le confinement imposé est de 20 MPa.

La figure 6.22 montre que la variation du paramètre  $DEC_\Psi$  n'a pas d'impact majeur sur le pic et le palier de contrainte. En augmentant  $DEC_\Psi$  on retarde la variation de l'angle de dilatance. Pour un même raccourcissement et différentes valeurs de  $DEC_\Psi$ , nous obtenons différentes valeurs de  $\Psi$ . L'augmentation de  $DEC_\Psi$  induit une petite augmentation de la dilatance.

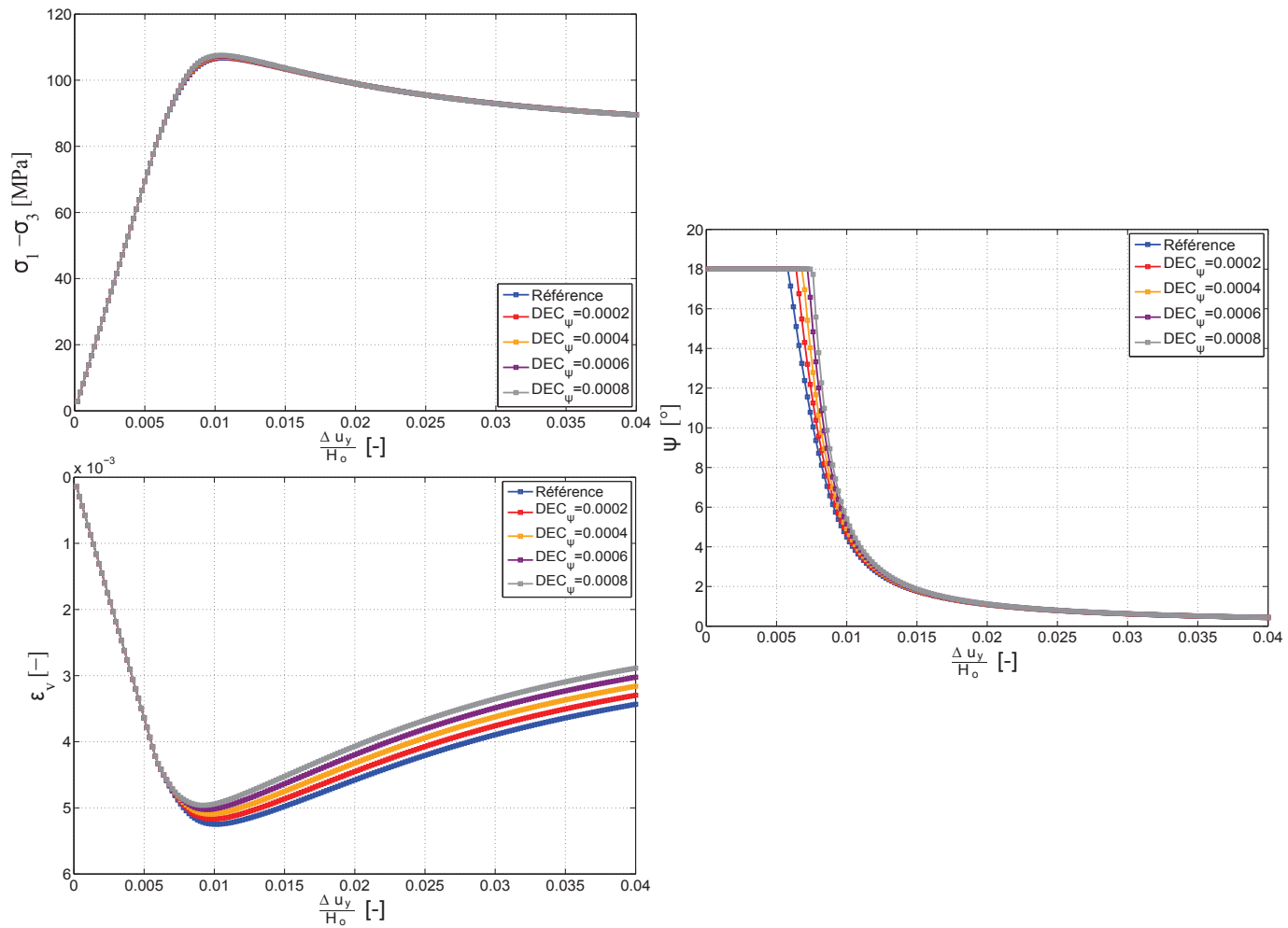


FIGURE 6.22 – Étude de sensibilité sur  $DEC_\psi$ , le confinement imposé est de 20 MPa.

L'étude de sensibilité sur le paramètre  $\Psi_i$  (figure 6.23) révèle que la déformation volumique croît avec l'augmentation de l'angle de dilance initial. Au début du calcul les valeurs de l'angle de dilance divergent puis au fur et à mesure que le raccourcissement augmente les valeurs se rapprochent. La variation de  $\Psi_i$  a une très faible influence sur le pic et le palier de contrainte.

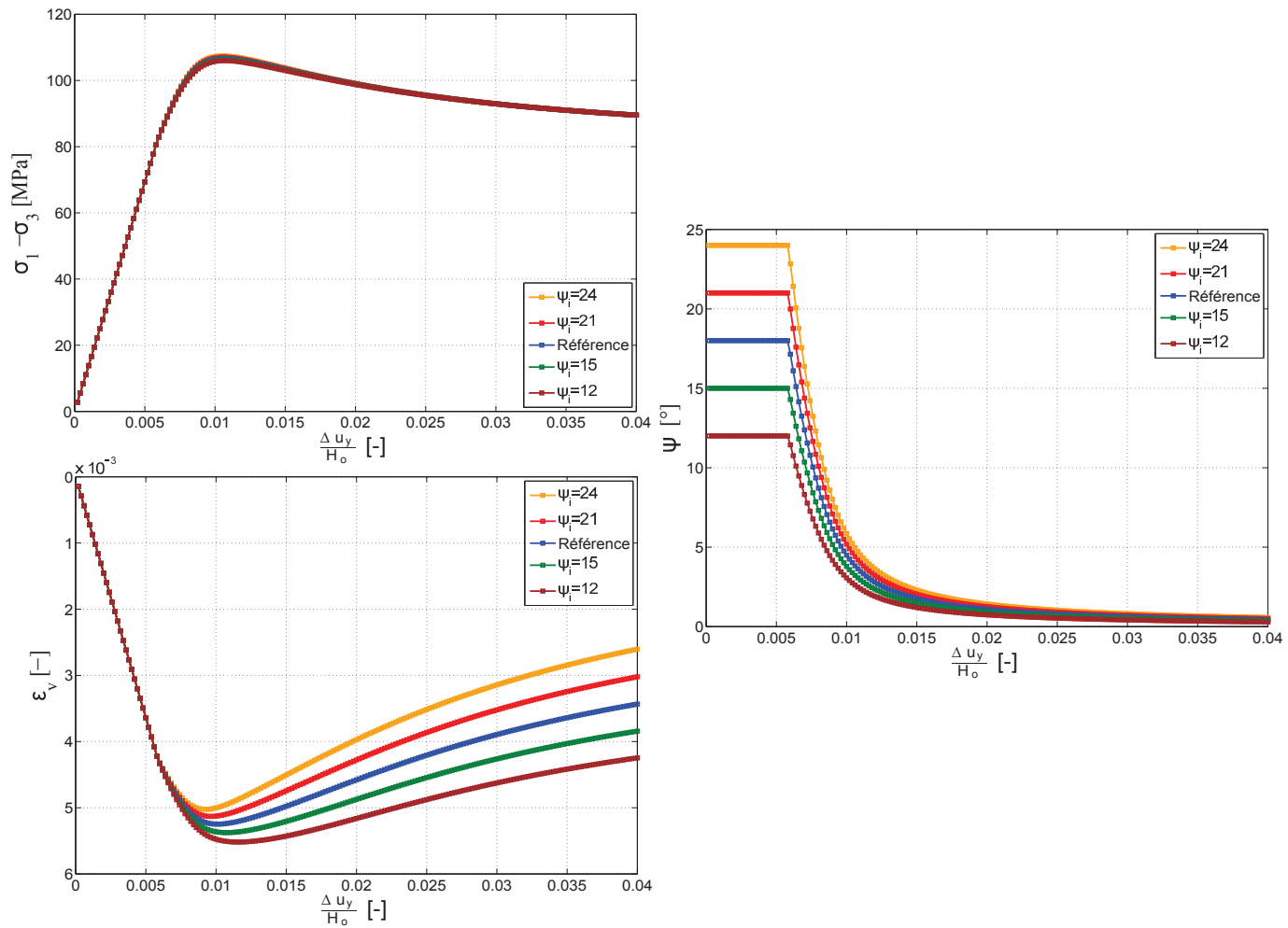
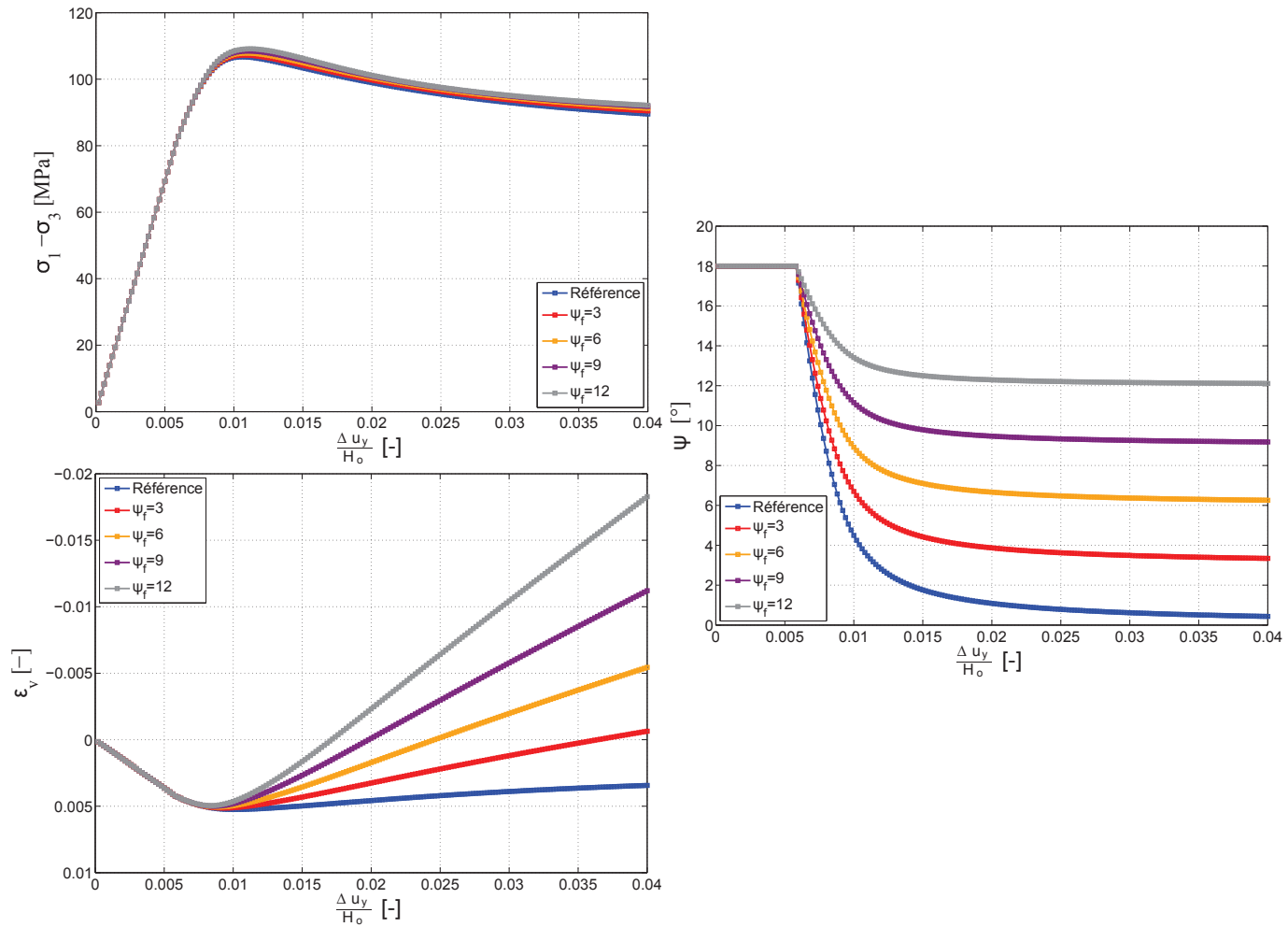


FIGURE 6.23 – Étude de sensibilité sur  $\Psi_i$ , le confinement imposé est de 20 MPa.

Les derniers résultats de l'étude de sensibilité concernent le paramètre  $\Psi_f$  (figure 6.24). Ces résultats montrent que l'augmentation de  $\Psi_f$  induit une très légère augmentation du pic de contrainte et ne modifie pas le palier de contrainte. Ce paramètre a beaucoup d'influence sur la déformation volumique. Plus on diminue  $\Psi_f$  plus nous réduisons la déformation volumique, nous n'observons presque plus de déformation volumique pour  $\Psi_f = 0$  (courbe de référence). Les courbes de variation de l'angle de dilatance indiquent que la valeur de l'angle à la fin du calcul correspond effectivement au  $\Psi_f$  imposé pour chaque calcul.

FIGURE 6.24 – Étude de sensibilité sur  $\Psi_f$ 

## 6.9 Jeu de paramètres final

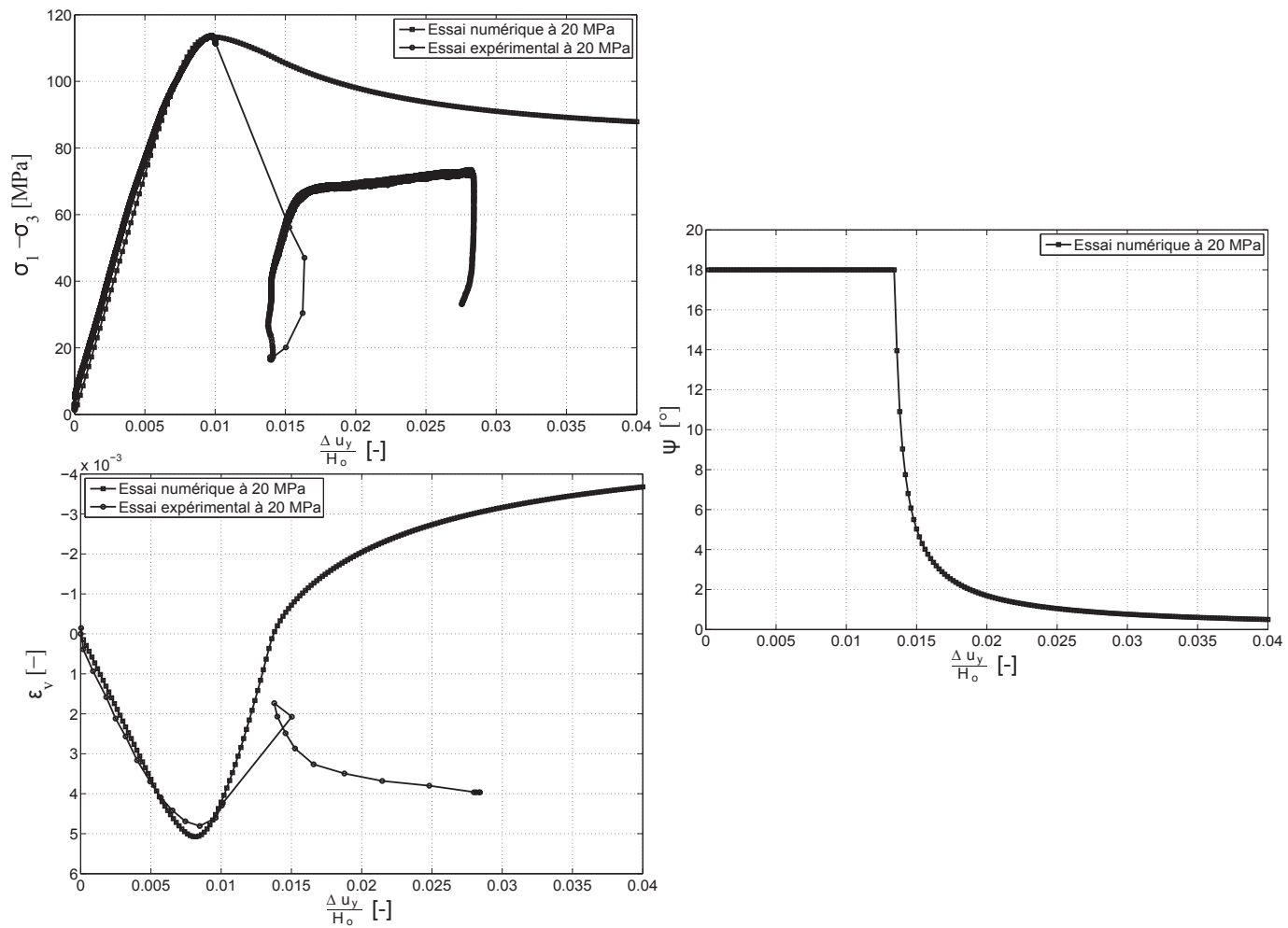
Dans l'objectif d'approcher au mieux les données expérimentales nous avons choisi un jeu de paramètres qui permet d'avoir un angle de dilatance variable tout en reproduisant au mieux les résultats expérimentaux. Le choix des paramètres constitutifs s'appuie sur notre expérience numérique basée sur l'étude de sensibilité effectuée sur tous les paramètres de la loi Plasol. Afin de ne pas avoir à refaire toute l'étude de sensibilité que nous avons conduite, avant la modification de l'angle de dilatance, nous avons utilisé une valeur de  $DEC_\Psi$  qui permet de faire varier l'angle de dilatance uniquement après que le pic de contrainte soit atteint. De plus, nous prenons une valeur de  $\beta_\Psi$  assez faible pour pouvoir décroître l'angle de dilatance rapidement après le pic de contrainte. Le jeu de paramètres sélectionné est présenté tableau 6.9.

P	E	$\nu$	$c_i$	$c_f$	$\varphi_i$	
20 MPa	13.7 GPa	0.215	32.5 MPa	9.6 MPa	4°	
$\varphi_f$	$\beta_c$	$\beta_\varphi$	$\Psi_i$	$\Psi_f$	$\beta_\Psi$	$DEC_\Psi$
21°	0.004	0.00053	18°	0°	0.0008	0.01

**TABLE 6.9** – Paramètres constitutifs choisis pour mieux approcher les données expérimentales

Nous présentons sur la figure 6.25 les résultats du calcul homogène effectué avec le jeu de paramètres sélectionné (tableau 6.9) et un confinement de 20 MPa. Nous remarquons que la courbe de chargement numérique homogène est proche de la courbe expérimentale jusqu'au pic de contrainte. La déformation axiale au pic ainsi que le pic de contrainte sont quasi identiques. Toutefois le palier de contrainte numérique est différent du palier expérimental. Les courbes de déformation volumique sont assez proches jusqu'au seuil de localisation.





**FIGURE 6.25** – Résultats du calcul homogène effectué avec le jeu de paramètres tableau 6.9 et un confinement de 20 MPa

Nous avons effectué un calcul avec 16200 éléments en utilisant les paramètres constitutifs présentés au tableau 6.9. Nous avons initialement utilisé pour ce calcul une valeur de  $D = 1N$ , mais le calcul présentait des problèmes de convergence à cause du phénomène de snapback. Nous avons donc appliqué la méthode présentée au chapitre 4 pour résoudre le problème de convergence lié au snapback. Nous avons dû utiliser une valeur importante de  $D$  pour dépasser la zone de snapback ( $D = 80N$ ). Nous avons considéré qu'il serait plus judicieux de réduire le paramètre second gradient graduellement au lieu de le réduire instantanément. Ainsi, nous faisons 3 reprises du premier calcul où  $D = 80N$ . Pour la première reprise, nous utilisons  $D = 40N$ , pour la deuxième il vaut  $20N$  et pour la dernière nous l'imposons à  $10N$ . Nous avons estimé qu'il n'était pas nécessaire de le diminuer d'avantage car les largeurs de bande obtenues à la fin du calcul étaient satisfaisantes.

A la différence des calculs effectués pour l'étude de sensibilité où nous utilisons une zone affaiblie composée de 81 éléments, la zone affaiblie pour les calculs effectués avec un angle de dilatance variable est de seulement 25 éléments. Cette zone a été réduite car nous avons constaté en effectuant des calculs qui présentent de la localisation de la déformation et pour lesquels l'angle de dilatance est variable que, le long de la bande les largeurs variait beaucoup. Nous pensons que cela est dû à la zone affaiblie, c'est pour cette raison que nous avons décidé de la réduire en terme de surface. La réduction de la zone affaiblie a eu pour conséquence l'obtention de bandes qui ne passent pas nécessairement par cette zone.

La figure 6.26 montre les résultats du calcul effectué avec un confinement de 20 MPa. Les niveaux de raccourcissement pour lesquels les courbes sur la figure changent de pente correspondent au moment où la valeur du paramètre second gradient a été modifiée. Nous comparons la réponse mécanique du calcul numérique avec celle de l'essai expérimental. Nous remarquons que le pic de contraintes ainsi que la déformation axiale au pic des deux essais sont les mêmes. Cependant, le palier de contrainte de l'essai numérique est légèrement au dessus du palier expérimental. En ce qui concerne la déformation volumique les deux courbes sont très proches, la déformation volumique continue à augmenter légèrement pour le calcul numérique. Rappelons que nous avons montré au chapitre 4 que la méthode pour franchir le snapback (en augmentant temporairement  $D$ ) n'a pas d'effet notable sur la courbe de variation de volume.

En effectuant un calcul avec un angle de dilatance nul, nous avons remarqué que la déformation volumique devenait constante (figure 6.16). Nous avons donc voulu connaître la raison pour laquelle la déformation volumique continuait d'augmenter légèrement pour le calcul avec un angle de dilatance variable. Nous montrons sur la figure 6.28 les valeurs de l'angle de dilatance dans l'échantillon pour deux niveaux de raccourcissements. Nous notons en comparant ces deux images l'augmentation du nombre d'éléments avec un angle de dilatance nul. Les éléments pour lesquels  $\Psi = 18$  sont les éléments qui sont en décharge élastique et qui de plus n'ont jamais été dans la bande. L'augmentation de la zone avec  $\Psi$  proche de  $0^\circ$  montre clairement que la bande s'élargit. Nous pensons que l'augmentation de la déformation volumique provient du fait que l'augmentation de la bande a pour conséquence de rendre en charge plastique des points de Gauss qui ne l'étaient pas auparavant. Lorsque ces points rentrent en plasticité, ils ont un angle de dilatance important (figure 6.29 image de droite) qui après diminue rapidement. Nous pensons que c'est cet angle de dilatance qui est assez élevé dans certains points de Gauss qui induit l'augmentation de la déformation malgré le fait qu'un grand nombre de points de Gauss ont un angle de dilatance proche de  $0^\circ$  (figure 6.29 image de gauche).

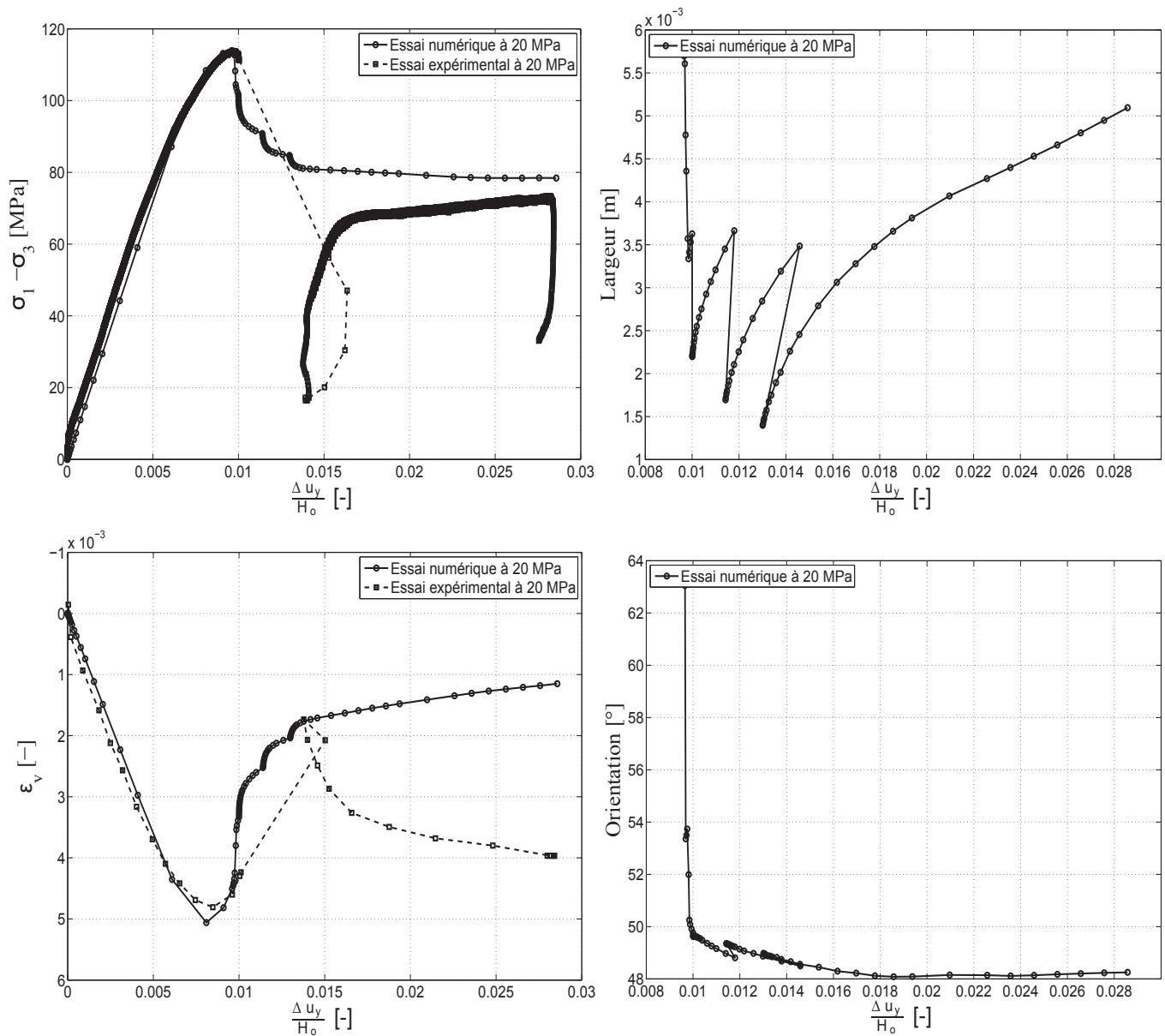


FIGURE 6.26 – Résultats du calcul effectué avec un maillage de 16200 éléments et un confinement de 20 MPa. Le jeu de paramètres utilisé est présenté tableau 6.9

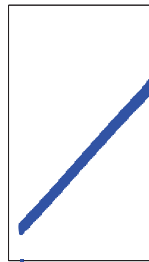
**Remarque :** Il est important de souligner que la distribution des valeurs de l'angle de dilatance dans l'échantillon ne permet pas toujours d'avoir une indication sur la largeur de la bande et cela pour deux raisons.

La première est que lorsqu'un point de Gauss est dans la bande et qu'il y reste, son angle de dilatance va diminuer jusqu'à atteindre  $0^\circ$ . Toutefois si nous réduisons la valeur du paramètre second gradient en effectuant une reprise de calcul, la largeur de la bande sera réduite. Certains points de Gauss, qui étaient en charge plastique, passent

en décharge élastique et ne sont plus dans la bande. Cependant ces points de Gauss garderont la valeur de  $\Psi$  qu'ils avaient avant de se trouver à l'extérieur de la bande. Ainsi en affichant les grandeurs de l'angle de dilatance dans l'échantillon nous pouvons avoir l'impression que les points de Gauss font encore partie de la bande alors que ce n'est plus le cas.

La deuxième raison pour laquelle l'angle de dilatance peut fausser l'estimation de la largeur de la bande réside dans le fait que, si la bande change de manière significative d'orientation, certains points de Gauss qui se trouvaient à l'intérieur de la bande pourraient en sortir. Nous nous retrouvons comme dans le premier cas : mais pour autant leur angle de dilatance peut être très inférieurs à  $\Psi_i$ . En traçant donc la distribution de  $\Psi$  dans l'échantillon, nous ne verrons pas la bande de localisation réelle. La bande obtenue contiendra tous les points de Gauss qui ont appartenu ou qui appartiennent à la bande.

En conclusion, la condition principale pour que la répartition des angles de dilatance permette d'avoir une indication sur la largeur de la bande est la suivante : que les points de Gauss qui se trouvent à l'intérieur de la bande le restent tout au long du calcul.



**FIGURE 6.27** – Bande de localisation (points en charge plastique) qui correspond au raccourcissement où la bande est à son minimum

Nous avons sur la figure 6.26 l'évolution de la largeur et de l'orientation de la bande en fonction du raccourcissement axial normalisé pour un calcul effectué avec un confinement de 20 MPa. Les niveaux de raccourcissement pour lesquels la largeur de la bande change brusquement correspondent aux moments où le paramètre second gradient a été réduit. La largeur de bande minimale que nous obtenons avec ce calcul est de 1.38 mm. En ce qui concerne l'orientation de la bande, nous constatons qu'elle varie peu et reste autour de 48°. Nous rappelons qu'en raison de la réduction de la zone affaiblie, cette dernière n'est pas traversée par la bande (figure 6.27).

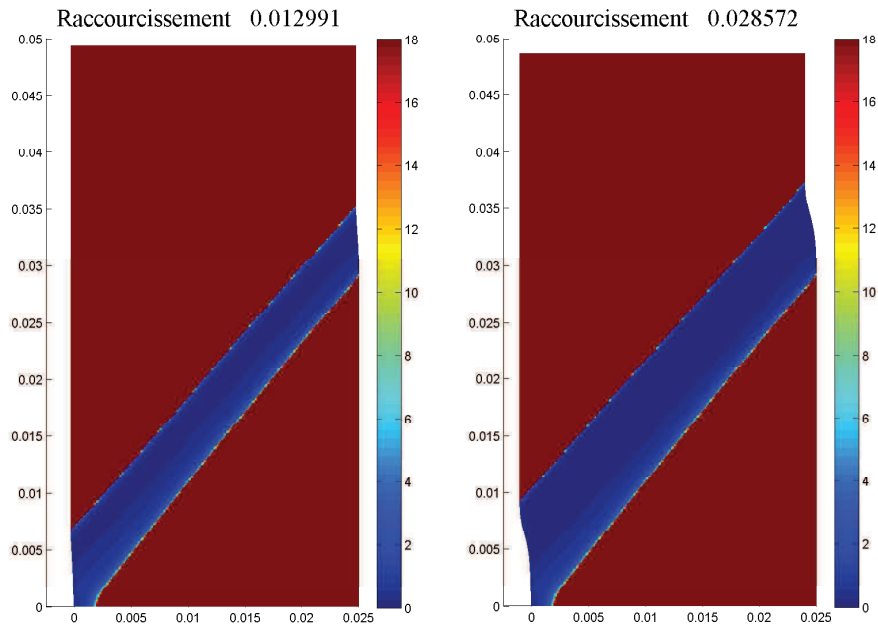


FIGURE 6.28 – Valeur de l’angle de dilatance dans l’échantillon numérique au début de la reprise avec  $D = 10N$  (image de gauche) et à la fin du calcul (image de droite)

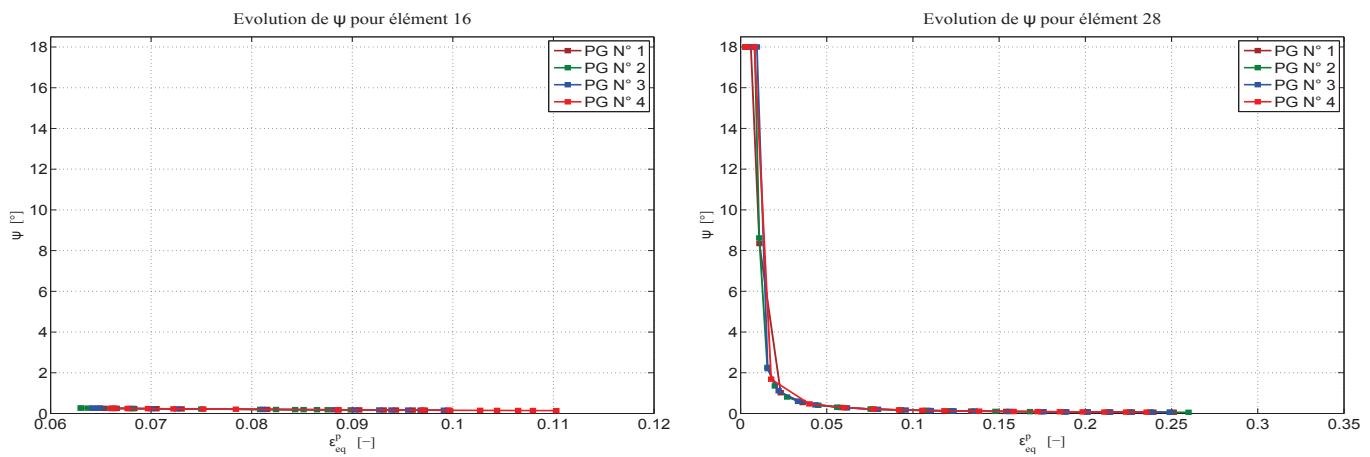


FIGURE 6.29 – Évolution de l’angle de dilatance en fonction de la déformation plastique équivalente pour l’élément 1 et l’élément 28



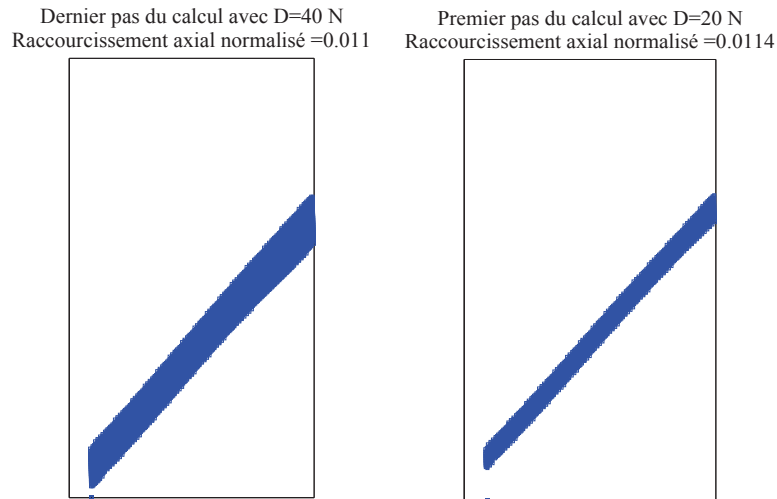
**FIGURE 6.30** – Positions des éléments 16 et 28 dans le maillage à 16200 éléments

Nous allons maintenant analyser les résultats du calcul effectué avec le même jeu de paramètres que celui utilisé précédemment, mais avec cette fois un confinement de 30 MPa. La figure 6.33 présente la réponse mécanique ainsi que l'évolution de la largeur et de l'orientation de la bande pour ce calcul.

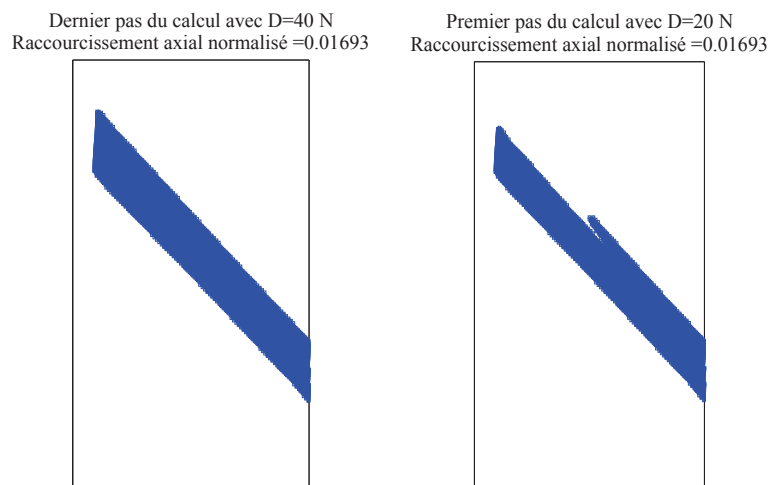
Nous déduisons de la comparaison entre la courbe de chargement de l'essai numérique et celle de l'essai expérimental, que les pics de contrainte sont très proches. La déformation axiale au pic pour l'essai numérique est légèrement supérieure à celle que nous observons pour l'essai expérimental. Pour ce qui est de la déformation volumique, les deux courbes sont assez proches si nous notons que la déformation volumique continue à augmenter sensiblement pour l'essai numérique. Les raisons de cette augmentation sont celles évoquées précédemment.

Les résultats concernant la largeur de la bande indiquent que pour les raccourcissements autour de 0.01693 et de 0.0244, la largeur de la bande a subi des fluctuations. Ce phénomène est amplifié dans les courbes de variation de l'orientation de la bande. Ces fluctuations sont dues à la manière avec laquelle le calcul gère la réduction du paramètre second gradient et donc de la largeur de bande. En effet, dans le cas du calcul effectué avec un confinement de 20 MPa, nous avons remarqué que la réduction du paramètre  $D$  induisait immédiatement une réduction de la largeur (figure 6.31). Dans le cas du calcul avec un confinement de 30 MPa, la largeur de la bande change au fur et à mesure que le chargement augmente (figure 6.32). Nous pensons que la bande se scinde en deux, puis que l'une des deux bandes se désactive. C'est ce mécanisme qui est responsable de la variation de la largeur et l'orientation de la bande de manière irrégulière. La largeur de bande minimale obtenue avec ce calcul est de 1.53 mm. L'orientation de la bande

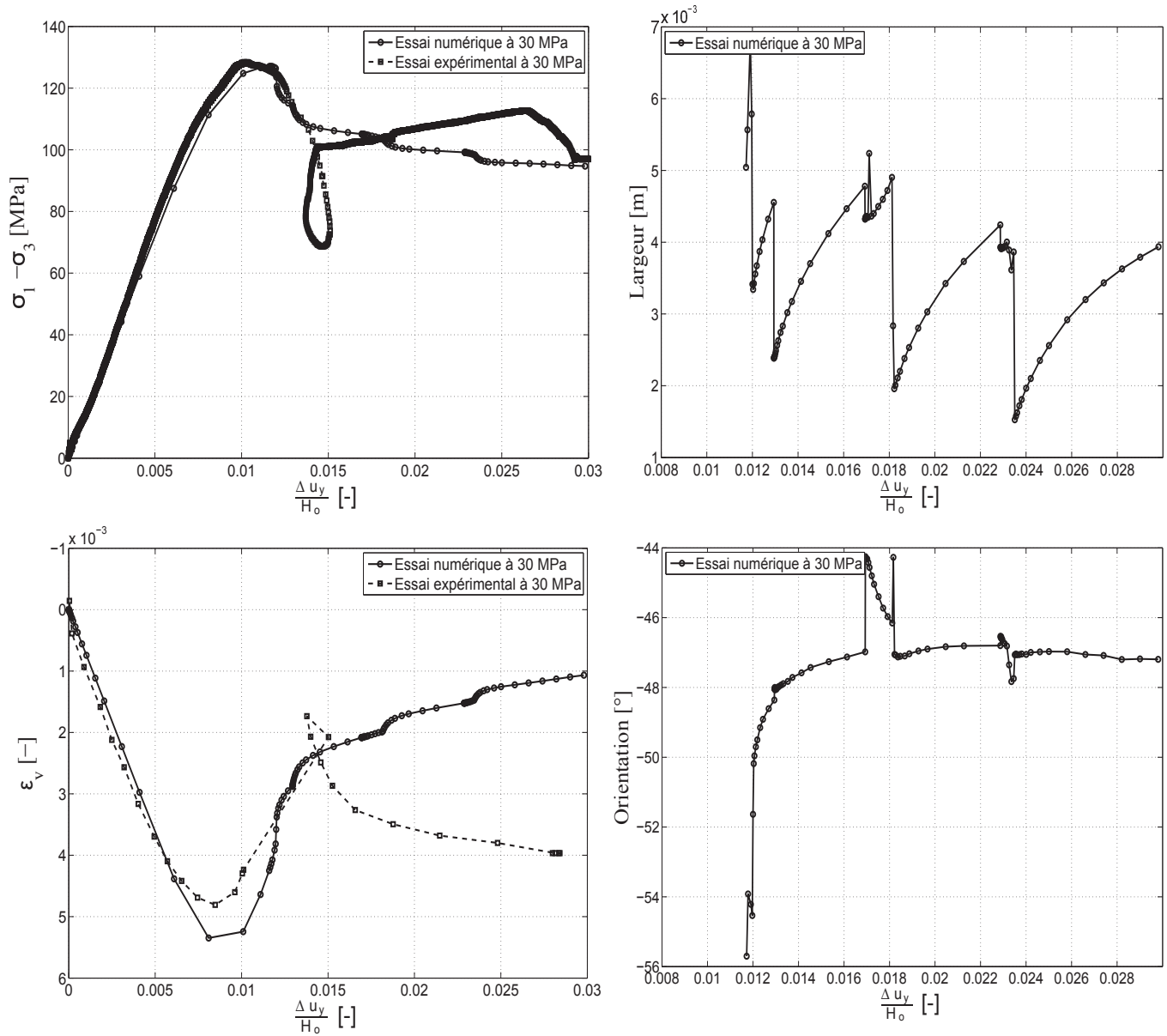
correspondant à ce minimum est de près de  $47^\circ$ . Pour ce calcul comme pour le calcul avec une pression de confinement de 20 MPa. La zone affaiblie n'est pas traversée par la bande.



**FIGURE 6.31** – Bandes de localisation pour le calcul effectué avec un confinement de 20 MPa. L'image de gauche correspond au dernier pas de calcul avec  $D = 40N$ . L'image de droite correspond au premier pas la reprise avec  $D = 20N$



**FIGURE 6.32** – Bandes de localisation pour le calcul effectué avec un confinement de 30 MPa. L'image de gauche correspond au dernier pas de calcul avec  $D = 40N$ . L'image de droite correspond au premier pas de la reprise avec  $D = 20N$



**FIGURE 6.33** – Résultats du calcul effectué avec un maillage de 16200 éléments et un confinement de 30 MPa. Le jeu de paramètres utilisé est présenté au tableau 6.9



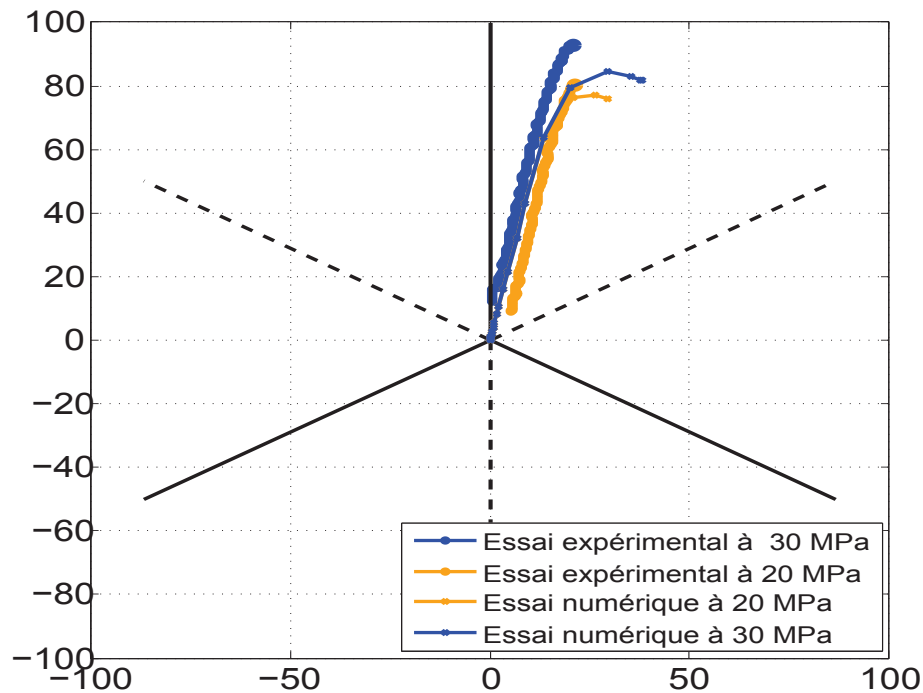


FIGURE 6.34 – Chemin de contrainte dans le plan déviatorique pour les essais numériques et expérimentaux

Nous comparons figure 6.34 le chemin de contrainte dans le plan déviatorique pour un essai numérique et un essai expérimental et ce, pour les deux confinements de 20 et 30 MPa. Cette comparaison montre que les résultats sont très proches, bien que nous remarquons une légère différence un peu avant le pic de contrainte, avec une inflexion des courbes numériques qui ne sont pas observées expérimentalement (la rupture expérimentale apparaissait brutalement dans certains cas).

## 6.10 Conclusion

Voici les principaux résultats :

- Nous avons montré qu'il est possible d'optimiser le pic de contrainte sans apporter de modification au reste des observables. La variation du pic de contrainte entraîne une variation du palier de près de 1.5 MPa qui n'est pas significative. Nous ne l'avons pas corrigé (nous ne disposons pas encore de l'étude de sensibilité sur le palier), mais cela ne pose aucun problème de principe.
- Nous avons réussi à faire varier la déformation axiale au pic sans que cela ait un impact sur les autres observables. Nous notons cependant que le palier de contrainte varie de près de 2 MPa.
- Le palier de contrainte a pu être optimisé sans que cela affecte les autres observables

- Il est possible de varier la largeur de la bande tout en gardant les autres observables inchangés
- Nous n'avons pas choisi une grandeur particulière dans la courbe de déformation volumique pour l'optimisation. Car nous avons souhaité optimiser toute la courbe. Il est en effet possible de modifier la courbe sans que le reste des observables ne soit changé. Cependant il faut être prudent dans l'optimisation de la déformation volumique car, dans notre cas nous avons observé une modification de l'orientation de la bande d'environ  $3^\circ$ . Le palier a subi une modification de 2.6 MPa suite à cette optimisation.

En plus des points ci-dessus nous avons proposé dans ce chapitre une modification de la loi de comportement qui permet de mieux approcher les courbes de variation volumique expérimentales en utilisant un angle de dilatance variable. Au début du chargement plastique, la dilatance du matériau est forte, puis elle diminue, pour éventuellement devenir nulle. Nous avons ainsi introduit dans la loi Plasol une nouvelle façon de contrôler la variation de l'angle de dilatance. Les résultats homogènes obtenues avec un élément ont permis de valider l'implémentation. L'étude de bifurcation de Rice révèle que le fait de varier la dilatance, offre à la bande de localisation un éventail d'orientations plus large que si  $\Psi$  est constant.

A partir de la variation de l'angle de dilatance nous avons choisi un jeu de paramètres qui nous a permis d'approcher suffisamment les résultats expérimentaux. Nous remarquons qu'avec des confinements de 20 et 30 MPa, nous avons réussi à reproduire le pic de contrainte, la déformation axiale au pic et la déformation volumique, de manière satisfaisante. La largeur de la bande reste plus grande que celle qui est observée expérimentalement en raison de la discrétisation spatiale de notre milieu (taille des éléments). Le palier des essais numériques reste légèrement supérieur au palier de contrainte expérimental. Il est important de noter que malgré la variation de l'angle de dilatance, nous observons une légère augmentation de la déformation volumique. Nous avons expliqué cela par l'élargissement de la bande de localisation.

---

### Conclusions et perspectives

---

Nous avons proposé dans ce mémoire une méthode d'identification des paramètres constitutifs d'une loi de comportement enrichie de type second gradient. Cette identification s'appuie sur des essais biaxiaux menés sur le grès de Vosges dans un appareil triaxial vrai. Cet appareil permet de visualiser l'échantillon en cours d'essais, sous chargement. Les observables extraits de ces essais ont été utilisés pour l'identification. Celle-ci est composée essentiellement de deux étapes.

1. La première étape est basée sur la réponse homogène des essais. Cette réponse est constituée de la courbe de chargement et de la courbe de déformation volumique. Les paramètres qui jouent un rôle uniquement dans la partie homogène des essais, ont pu être déduits à partir des données issues des essais triaxiaux. Ces paramètres ont été par la suite ajustés grâce à l'étude de sensibilité effectuée sur un essai numérique homogène (avec un élément). Nous avons ainsi, pu optimiser le module de Young, le coefficient de Poisson, etc.  
L'analyse de bifurcation à partir du critère de Rice [84] nous a permis par la suite de déduire l'éventail des orientations de bandes possibles en cas de localisation. Les orientations de bandes observées expérimentalement étaient incluses dans l'intervalle d'orientations prédit par le critère. Ce résultat est très encourageant, car il montre qu'il est possible de retrouver à partir des essais numériques les résultats expérimentaux en ce qui concerne l'orientation de la bande.

Avant de poursuivre le processus d'identification nous avons effectué un certain nombre de choix sur les paramètres numériques du calcul. Ci-dessous les principaux résultats :

- L'utilisation d'un maillage composé de 16200 éléments carrés et un paramètre second gradient  $D = 1N$  permet d'obtenir des largeurs de bandes de l'ordre de 1 mm. Nous avons montré qu'afin d'obtenir une largeur de bande inférieure à 1 mm, tout en ayant un calcul objectif, il est indispensable d'utiliser plus de 16200 éléments. Cependant le temps de calcul devient plus long. En ce sens, la parallélisation du code de calcul serait une manière de résoudre les difficultés liées au temps de calcul. De plus, les résultats avec le maillage non structuré sont encourageants, cette piste devrait être exploitée d'avantage.
- Nous avons montré que l'utilisation d'une zone affaiblie pour initier la localisation de la déformation et surtout pour tenter d'imposer la position de la bande de localisation, avait pour seul effet d'anticiper légèrement le seuil de localisation. Il est donc tout à fait justifié de l'utiliser. Néanmoins, nous suggérons pour un travail futur d'imposer un champ de vitesses de déformation correspondant à celui qui est observé expérimentalement, dans le but d'obtenir une structure de localisation encore plus proche de celle qui est observée expérimentalement [16].
- Nous avons développé une méthode permettant de dépasser les problèmes de convergences liés au phénomène de snapback. Nous avons montré que si cette méthode est employée avec précaution pour un calcul présentant du snapback, le palier de contrainte ainsi que la largeur et l'orientation de la bande, seraient les mêmes que ceux obtenus si le calcul n'avait pas présenté du snapback. Malgré l'efficacité de cette méthode, elle a l'inconvénient de ne pas être automatique et implique un traitement manuel. L'utilisation d'une méthode de longueur d'arc pour la résolution du problème de snapback serait donc préférable [56].

2. La deuxième étape de l'identification est la contribution originale de ce travail, qui concerne le régime de déformation localisé. Nous établissons un certain nombre d'observables sur lesquels appuyer la comparaison entre calculs numériques et observations expérimentales : pic de contrainte, palier de contrainte, déformation axiale au pic, largeur et orientation des bandes, variation volumique globale de l'échantillon. Nous avons développé les outils nécessaires pour pouvoir extraire ces observables à partir des résultats numériques.

L'étude de sensibilité nous a permis de déterminer l'influence de chacun des paramètres constitutifs (à l'exception de la cohésion initiale et du frottement initial) sur les observables sélectionnés. Nous avons utilisé pour cette étude deux confinements à 20 et 30 MPa. La matrice de sensibilité a pu être calculée grâce à cette étude dont nous rappelons les principaux résultats :

- La cohésion finale et le frottement final, ont une grande influence sur le palier et le pic de contrainte
- La déformation axiale au pic est sensible à tous les paramètres constitutifs.

Cependant, le paramètre  $\beta_\varphi$  est celui qui a le moins d'impact sur la déformation axiale au pic.

- La déformation volumique globale de l'échantillon est très sensible à la variation de l'angle de dilatance. Ce paramètre modifie de manière significative le régime dilatant après le pic de contrainte.
- Le paramètre second gradient est celui qui a le plus d'influence sur la largeur de la bande. Cependant, nous avons remarqué que d'autres paramètres pouvaient influencer la largeur, en raison de la relation entre ces paramètres et le déterminant du tenseur acoustique. En effet, la largeur de la bande ne dépend pas uniquement du paramètre second gradient mais aussi du déterminant du tenseur acoustique [16].

En raison de la dépendance de la largeur de la bande vis-à-vis du déterminant du tenseur acoustique, elle n'est pas constante et continue d'augmenter au niveau du palier de contrainte. Toutefois, au niveau expérimental la largeur de la bande reste quasi-constante. Il serait intéressant suite à ce constat de réfléchir à une méthode qui permettrait d'empêcher l'augmentation de la largeur de bande. Par exemple, en reliant le module second gradient au déterminant du tenseur acoustique.

L'étude de sensibilité a révélé que le pic de contrainte est plus sensible au frottement pour un calcul effectué avec un confinement de 30 MPa, par rapport à un calcul effectué avec un confinement de 20 MPa. Afin de palier ce problème, nous avons suggéré l'utilisation de deux nouveaux observables qui sont : la cohésion apparente et le frottement apparent, qui peuvent servir comme substituts au pic de contrainte dans la matrice de sensibilité.

Une fois l'étude de sensibilité achevée, nous avons procédé à l'optimisation des observables. Nous avons montré qu'il est possible d'optimiser chaque observable indépendamment, c'est-à-dire sans apporter de modifications aux autres observables, ceci grâce à l'étude de sensibilité effectuée. De plus, nous avons apporté une modification à la loi de comportement qui permet de varier l'angle de dilatance au cours du calcul. Cette méthode a pour objectif l'obtention de courbes de déformation volumique plus proches de celles obtenues expérimentalement.

Nous avons proposé un jeu de paramètre qui permet de reproduire de manière fiable les données expérimentales, issues des essais biaxiaux menées sur le grès à 20 et 30 MPa. Nous avons souligné que l'augmentation du nombre d'éléments pour modéliser des largeurs de bande plus réaliste induisait un temps de calcul qui peut être très lourd. Pour palier à ce problème, il serait intéressant d'utiliser les méthodes de second gradient pour la propagation de la localisation, puis associer ces méthodes à d'autres modèles. Par exemple en dérivant explicitement une discontinuité, comme le modèle de Daphnis développé par Crochepeyre durant sa thèse [24].

Le processus d'optimisation pourrait être automatisé en implémentant une méthode d'analyse inverse (exemple : méthode de gradient), cependant une réflexion devrait être menée afin d'utiliser les observables les plus pertinents. Les développements effectués

par Levasseur [62] pourront être exploités à cet effet.

## ANNEXE A

---

### Profil de déplacement

---

Nous présentons ici le profil de déplacement d'un calcul pour lequel nous avons fait un tirage aléatoire. Nous observons durant ce calcul trois bandes, au cours du chargement l'une des bandes se désactive et il ne reste plus que deux bandes. La figure A.1 montre le profil de déplacement pour une zone qui prend en compte les deux bandes situées en haut de l'échantillon. L'une de ces deux bandes se désactive au fur et à mesure que le raccourcissement augmente. La figure A.2 montre que l'une des deux bandes commence à se désactiver mais ceci n'est pas encore visible sur le profil de déplacement puisque les nœuds que nous avons choisis pour calculer le profil se trouve plus ou moins au centre de la bande. Il n'est donc pas possible d'observer les modifications qui surviennent aux extrémités de la bande. A partir du pas 16 (figure A.3), nous pouvons voir la désactivation de la bande, puis celle-ci disparaît au pas 20 (figure A.4).

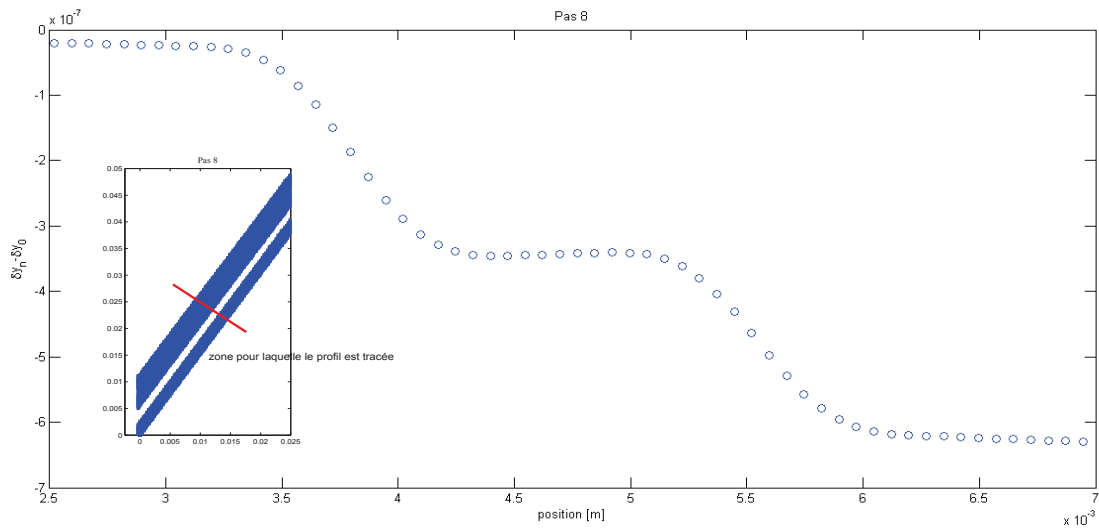


FIGURE A.1 – Profil de déplacement pour le pas 8

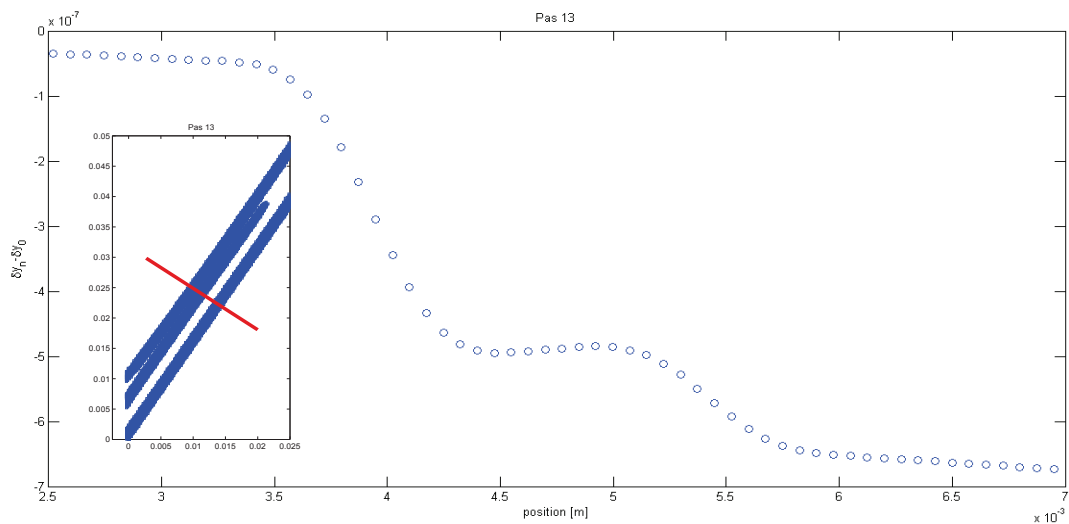


FIGURE A.2 – Profil de déplacement pour le pas 13

Dans tous les profils que nous présentons ici, il n'est pas possible de voir la troisième bande qui est située en dessous des deux autres bandes. Ceci s'explique par le fait que nous n'avons pas choisis assez de nœuds pour le profil de déplacement. Ces nœuds s'arrêtent avant d'atteindre la dernière bande, nous ne pouvons donc avoir des informations concernant cette bande ni même de son existence.



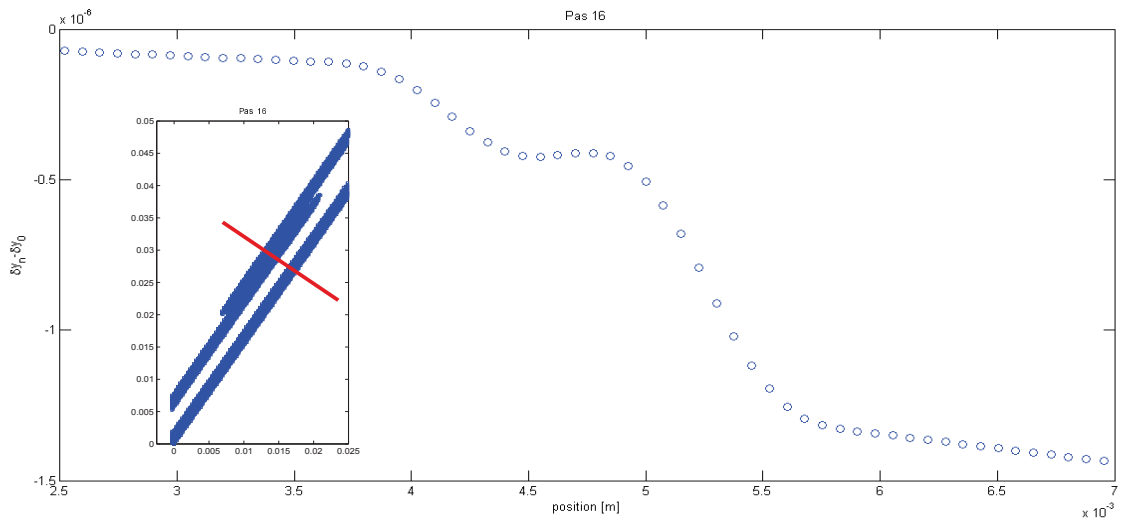


FIGURE A.3 – Profil de déplacement pour le pas 16

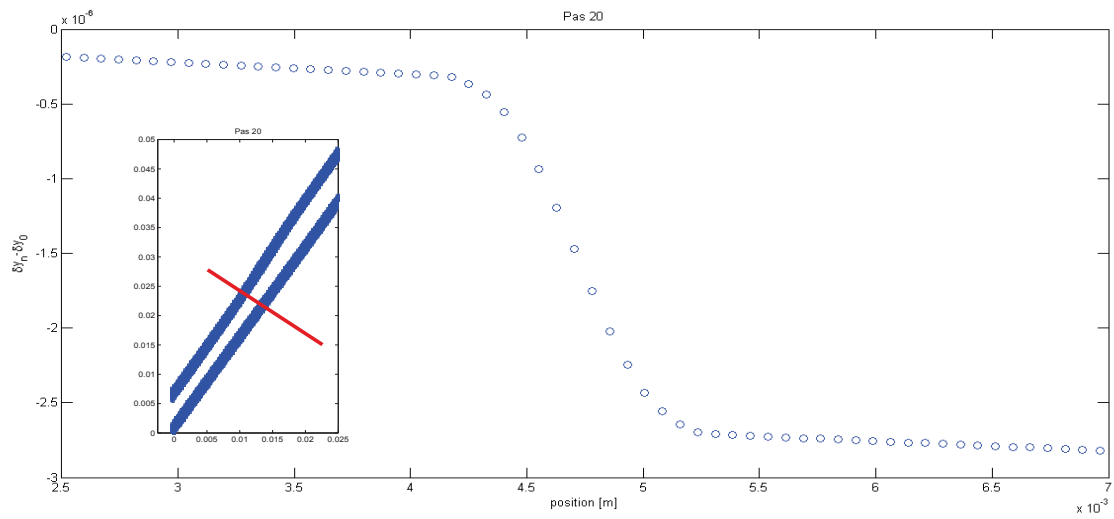


FIGURE A.4 – Profil de déplacement pour le pas 20

---

### Modifications dans le code de calcul Lagamine

---

Modification faites dans le code de calculs Lagamine par EL MOUSTAPHA Khadijatou durant sa thèse (Septembre 2010- Mars 2014). Vous trouverez dans ce dossier toutes les sous-routines concernées par ses modifications, un fichier LAG, un fichier PRI, deux fichiers de chargement, annexe du manuel et organigramme de Lagamine, et les sources fortran.

- Modifications apportées au format du fichier PRI pour permettre d'écrire dans le fichier IPE pour plus de 9999 éléments, à n'utiliser que si le nombre d'éléments dépasse 10000 éléments, fichier LECIMP.F. Nous réservons donc 10 colonnes (10 digits) pour chaque valeur écrite dans le fichier PRI (exemple.pri).
- Fichier PRISIG.F : Changement qui permet d'avoir un espace entre les éléments et la variable de sortie q pour pouvoir exploiter le fichier IPE avec Matlab.
- Fichier PLA2EA.F : NINTVmax=4000 élément très petit (taille est de 0.43 mm dans mon cas).
- Fichier PRISUM.F : Augmentation du nombre de chiffres significatifs après la virgule pour les valeurs imprimées pour les nœuds. Ce nombre est passé de 6 à 7. Modification

à utiliser uniquement si l'on a besoin de beaucoup de précision pour le fichier IPN

- Fichiers PRISUM.F et LAMIN2.F : Changement de la taille du tableau MPRIE pour pouvoir imprimer pour plus de 5000 éléments, cette taille a été fixée à NELEM le nombre d'éléments. Puisque le nombre de nœuds dépasse 5000, la taille du tableau MPRIN doit être augmentée nous la mettons à NUMNP qui correspond au nombre de nœuds
- Fichiers LPLA.F, PLAINT.F, PLA2EA.F : Modifications au niveau de l'angle de dilatance. Il varie de façon hyperbolique en fonction de la déformation plastique équivalente, cette variation est la même que celle définie pour le frottement ainsi que la cohésion. Nous introduisons 6 paramètres PSICF, PSICI, PSIEI, PSIEF, DECPSI, BETAPSI (I pour initial, F pour final, C pour compression et E pour extension). Pour faciliter le travail nous avons renommé les fichiers PLAINT.F PLADER.F et PLAINV.F. : PLAINTKHADI.F et les sous-routines éponymes qu'ils contiennent. Changez donc les noms quand celles-ci sont appelées dans PLA2EA.F. Une ligne doit être rajoutée au fichier LAG (après la ligne où est définie la cohésion initiale et finale) pour donner les valeurs de ces paramètres. De plus, il faut prendre IECPS (toujours dans le LAG) supérieur à 1 pour faire un calcul avec dilatance variable. Pour en savoir plus voir le fichier LAG qui se trouve dans ce dossier. PSIC est stockée dans la variable QB(19), elle correspond à NINTV qui est calculée en début de pas et n'est plus utilisée.

**Pour trouver les modifications chercher 'KEL' dans les sous-routines concernées.**

---

## Bibliographie

---

- [1] Aifantis E. *A proposal for continuum with micristructure. Mechanics Research Communications*, 5 :139–145, 1978.
- [2] Aifantis E. *On the microstructural origin of certain inelastic models. Journal of Elasticity*, 106 :326–330, 1984.
- [3] Asaro R. *Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals. Acta Metallurgica*, 27 :445–453, 1979.
- [4] Barnichon J.D. *Finite Element Modelling in Structural and Petroleum Geology*. Ph.D. thesis, Université de Liège Faculté des Sciences Appliquées, 1998.
- [5] Bazant Z. and Belytschiko T. *Wave propagation in a stran-softening bar : exact solution. Journal of Engineering Mechanics*, 111 :381–389, 1985.
- [6] Bazant Z., Belytschiko T., and Chang T. *Continuum theory for strain-softening. Journal of Engineering Mechanics*, 110 :1666–1692, 1984.
- [7] Bazant Z. and Lin B. *Non local yield limit degradation. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 :1805–1823, 1988.
- [8] Bazant Z. and Pijaudier-Cabot G. *Non local continuum damage, localization instability and convergence. Journal of Applied Mechanics*, 55 :287–293, 1988.
- [9] Beck J. and Woodbury K. *Inverse problems and parameter estimation : integration of measurements and anlysis. Measurement Science and Technology*, 9 :839–847, 1998.

- 
- [10] Belytschko T., Bchang T., Hyun Y., and Chang T. *Strain softening materias and finite element solution. Computers et Structures*, 23 :163–180, 1986.
- [11] Belytschko T., Fish J., and Engelmann B. *A finite element with embedded localization zones. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77 :59–89, 1988.
- [12] Bonnans J., Gilbert J., Lemaréchal C., and Sagastizabal C. *Optimisation numérique. Mathématiques et Applications*, 27, 1997.
- [13] Bonnet M. *Problèmes inverese. Cours Master Recherche. Ecole Centrale de Lyon*, 2008.
- [14] Bésuelle P. *Déformation et rupture dans les roches tendres et les sols indurés : comportement homogènes et localisation*. Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, 1999.
- [15] Bésuelle P. and Chambon R. *Modeling the post-localization regime with local second gradient models : Non-uniqueness of solutions and non-persistent shear bands. Springer Proceedings in Physics*, 106 :14, 2006.
- [16] Bésuelle P., Chambon R., and Collin F. *Switching deformation modes in post-localization solutions with a quasibrittle material. Mechanics of Materials and Structure*, 1 :1115–1134, 2006.
- [17] Bésuelle P. and Hall S. *Characterization of the strain localization in a porous rock in plane strain condition using a new true-triaxial apparatus. Springer Series in Geomechanics and Geoengineering*, pages 345–350, 2011.
- [18] Bésuelle P. and Rudnicki J. *Mechanics of fluid saturated rocks*, volume 89, chapter Localization : Shear Bands and Compaction Bands, pages 240–273. International Geophysics Series, 2004.
- [19] Caillerie D., Chambon R., and Collin F. *Analytical evidence of shear band bifurcations for softening material. In Advances in Bifurcation and Degradation in Gematerials*, 2011.
- [20] Cescotto S. *General strategy fro nonlinear finite element formulation. Proceedings of the Fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering*, pages 155–164, 1989.
- [21] Chambon R. *Bifurcation par loclaisation en bandes de cisaillement, une approche avec des lois incrémentalement non linéaires. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 5 :277–298, 1986.
- [22] Chambon R., Caillerie D., and El Hassan N. *One-dimensional localisation studied with a second grade model. European Journal of Mechanics-A/Solids*, 17 :637–656, 1998.

- 
- [23] Chambon R., Caillerie D., and Matsushima T. *Plastic continuum with micro-structure, local second gradient theories for geomaterials : localization studies. International Journal of Solids and Structures*, 38 :8503–8527, 2001.
- [24] Chambon R. and Crochepeyre S. *Daphnis : a new model for the description of post-localization behaviour : application to sands. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 3 :127–153, 1998.
- [25] Chambon R., Crochepeyre S., and Charlier R. *An algorithm and a method to search bifurcation points in non-linear problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51 :315–332, 2001.
- [26] Chambon R. and Moullet J.C. *Uniqueness studies in boundary value problems involving some second gradient models. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :2771–2796, 2004.
- [27] Charlier R. *Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis*. Ph.D. thesis, Université de Liège, 1987.
- [28] Christoffersen J. and Hutchinson J. *A class of phenomenological corner theories of plasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27 :465–487, 1979.
- [29] Cosserat E. and Cosserat F. *Théorie des corps déformables. Herman et fils, Paris*, 1909.
- [30] Crisfield M. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, volume 1*. Wiley, 1991.
- [31] De Borst R. *Simulation of strain localization : a reappraisal of the cosserat continuum. Engineering Computations*, 4 :317–332, 1991.
- [32] De Borst R. and Mühlhaus H. *Gradient -dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35 :521–539, 1992.
- [33] De Borst R., Sluys L., and Mühlhaus H. *Continuum models for discontinuous media. In Fracture process in Concrete, Rock and Ceramics*, pages 601–618, 1991.
- [34] Desrues J. *La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1984.
- [35] Desrues J. *Limitation du choix de l'angle de frottement pour le critère de plasticité drucker-prager. Revue Française de Génie Civil*, 6 :853–862, 2002.
- [36] Desrues J., Chambon R., Mokni M., and Mazerolle F. *Void ratio evolution inside shear bands in triaxial sand specimens studied by computed tomography. Géotechnique*, 46 :529–546, 1996.

- 
- [37] Desrues J. and Viggiani G. *Strain localisation in sand : an overview of the experimental results obtained in grenoble using stereophotogrammetry*. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28 :279–321, 2004.
- [38] El Hassan N. *Modélisation théorique et numérique de la localisation de la déformation dans les geomatériaux*. Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, 1997.
- [39] El Moustapha K., Bésuelle P., and Sieffert Y. *Identification d’une loi de comportement enrichie pour les géomatériaux en présence d’une localisation de la déformation*. In *Congrès Français de Mécanique*. 2013.
- [40] El Moustapha K., Bésuelle P., and Sieffert Y. *Identification of enriched constitutive models for geomaterials in the presence of strain localization*. In *ALERT Geomaterials*. 2013.
- [41] El Moustapha K., Bésuelle P., and Sieffert Y. *Identification of enriched constitutive models for geomaterials in the presence of strain localization*. In *LAGASHOP*. 2013.
- [42] Fernandes R., Chavant C., and Chambon R. *A simplified second gradient model for dilatant materials : Theory and numerical implementation*. *International Journal of Solids and Structures*, 45 :5289–5307, 2008.
- [43] Germain P. *La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, première partie : théorie du second gradient*. *Journal de Mécanique*, 12 :235–274, 1973.
- [44] Gill P., Muray W., and Wright M. *Practical optimization*. *Academic Press*, 1982.
- [45] Goldberg D. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. *Addison Wesley Publishing Company*, 1989.
- [46] Hadamard J. *Leçon sur la propagation des ondes et les équations de l’hydrodynamique*. *Hermann Paris*, Chapitre 6, 1903.
- [47] Haimson B. and Chang C. *A new true triaxial cell for testing mechanical properties of rock, and its use to determine rock strength and deformability of westerly granite*. *International Journal of Rock Mechanics*, 35 :285–296, 2000.
- [48] Hall S., Muir Wood D., Ibraim E., and Viggiani G. *Localised deformation patterning in 2d granular materials revealed by digital image correlation*. *Matter*, DOI : 10.1007/s10035-009-0155-1, 2000.
- [49] Hill R. *Acceleration waves in solids*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10 :1–16, 1962.

- 
- [50] Hill R. and Hutchinson J. *Bifurcation phenomena in the plane tension test. Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 33 :239–264, 1975.
- [51] Holland J. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. MIT Press Cambridge, MA, USA, 1992.
- [52] Jirásek M. *Nonlocal models for damage and fracture : Comparison of approaches. International Journal of Sol*, 35 :4133–4145, 1998.
- [53] Jirásek M. *Computational resolution of strong discontinuities. Fifth World Congress on Computational Mechanics*, 2002.
- [54] Jirásek M. *Numerical modeling of strong discontinuities. Numerical Modelling in Geomechanics*, 6 :1133–1146, 2002.
- [55] Johnson C. and Scott R. *A finite element method for problems in perfect plasticity using discontinuous trial functions. Non linear finite element analysis in structural mechanics*, pages 307–324, 1981.
- [56] Kotronis, P. and Collin F. *Implementation of path following techniques into the finite element code lagamine*. Technical report, Université de Liège, 2005.
- [57] Kotronis P., Collin F., Bésuelle P., Chambon R., and Mazars J. *Local second gradient models and damage mechanics : 1d post-localization studies in concrete specimens. Bifurcation, Instabilities, Degradation in Geomechanics*, pages 127–142, 2007.
- [58] Lanatà P. *Caractérisation de la localisation de la déformation dans des roches poreuses en conditions triaxiales vraies*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble, En cours.
- [59] Lecampion B. *Identification de lois de comportement des roches argileuses*. Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique, 2002.
- [60] Lecampion B., Contantinescu A., and Nguyen Minh D. *Parameter identification for lined tunnels in viscoplastic medium. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26 :1191–1211, 2002.
- [61] Leroy Y. and Ortiz M. *Finite element analysis of strain localization in frictional materials. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 13 :53–74, 1989.
- [62] Levasseur S., Malécot y., Boulon B., and Flavigny E. *Soil parameter identification using a genetic algorithm. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32 :189–213, 2007.
- [63] Maier G. and Gioda G. *Optimization method for parametric identification of geotechnical systems. Numerical Methods in Geomechanics*, 92 :273–304, 1982.



- 
- [64] Mandel J. *Rhéologie et mécanique des sols, chapter conditions de stabilité et postulat de drucker*. Springer-Verlag, 58-68, 1966.
- [65] Matsuchima T., Chambon R., and Denis C. *Large strain finite element analysis of a local second gradient model : application to localization*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 :499–521, 2002.
- [66] Mazars J. *A description of micro and macroscale da of concrete structures*. *Engineering Fracture Mechanics*, pages 729–737, 1986.
- [67] Mühlhaus H. *Shear band analysis in granular media by cosserat thoery*. *Ingenieur-Archiv*, 56 :389–399, 1986.
- [68] Mühlhaus H. *Application of cosserat thoery in numerical solutions of limited load problems*. *Ingenieur-Archiv*, 59 :124–137, 1989.
- [69] Mühlhaus H. and Aifantis E. *A variational principle for gradient plasticity*. *International Journal of Solids and Structures*, 28 :845–857, 1991.
- [70] Mühlhaus H. and Vardoulakis I. *The thickness of shear bands in granural materials*. *Géotechnique*, 37 :271–283, 1987.
- [71] Mindlin R. *Influence of couple-stress on stress concentration*. *Experimental Maechanics*, 3 :1–7, 1963.
- [72] Mindlin R. *Micro-structure in linear elasticity*. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16 :51–78, 1964.
- [73] Mindlin R. and Eshel N. *One first stran-gradient thoeries in linear elasticity*. *International Journal of Solids and Structures*, 4 :109–124, 1968.
- [74] Morsegaard K. and Tarantola A. *Monte carlo sampling of solutions to inverse problems in*. *Journal of Geophysical Research*, 100 :12431–12447, 1995.
- [75] Needleman A. *A material rate dependence and mesh sensitivity localization problems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67 :69–86, 1988.
- [76] Needleman A. and Tvergaard V. *Finite element analysis of localization in plasticity*. *Finite Elements - Special Problems in Solid Mechanics*, 5 :94–157, 1982.
- [77] Nougier J. *Méthodes de calcul numérique*. Hermes Sciences, 2001.
- [78] Oliver J. and Simo J. *Modelling strong discontinuities by means of strain softening constitute equations*. *Computer Modelling of Concrete Structres*, pages 363–372, 1994.

- 
- [79] Parker L. *Understanding inverse theory. Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 5 :35–64, 1977.
- [80] Pastor M., Rubio C., Mura P., Peraire J., Vilote J., and Zienkiewicz O. *Numerical analysis of localization. Numerical Models in Geomechanics*, pages 339–348, 1992.
- [81] Pijaudier-Cabot G. and Bazant Z. *Non local damage theory. Journal of Engineering Mechanics*, 113 :1512–1533, 1986.
- [82] Pijaudier-Cabot G. and Benallal A. *Strain localization and bifurcation in a non local continuum. International Journal of Solids and Structures*, 13 :1761–1775, 1993.
- [83] Rice J. and Rudnicki R. *A note on some features of the theory of localization of deformation. International Journal of Solids and Structures*, 16 :597–605, 1980.
- [84] Rice J.R. *The localization of plastic deformation. Theoretical and Applied Mechanics*, pages 207–220, 1976.
- [85] Riks E. *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. International Journal of Solids and Structures*, 15 :529–551, 1979.
- [86] Roweis S. *Levenberg-Marquardt optimization*. 1996.
- [87] Rudnicki J. and Rice J. *Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23 :371–394, 1975.
- [88] Sambridge M. and Mosegaard K. *Monte carlo methods in geophysical inverse problems. Reviews of Geophysics*, 40, 2002.
- [89] Santamarina J. and Fratta D. *Introduction to discrete signal and inverse problems in civil engineering. ASCE Press*, 1998.
- [90] Sieffert Y., Al Holo S., and Chambon R. *Loss of uniqueness of numerical solutions of the borehole problem modelled with enhanced media. International Journal of Solids and Structures*, 46 :3173–3197, 2009.
- [91] Sluys L. *Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids*. Ph.D. thesis, Delft University, 1992.
- [92] Sulem J. and Vardoulakis I. *Bifurcation analysis of the triaxial test on rocks specimens. Acta Mechanica*, 83 :195–212, 1990.
- [93] Takemura T., Oda M., and Takahashi M. *Microstructure observation in deformed geomaterials using microfocus x-ray computed tomography. In : Otani J, Obara Y (eds) X-ray CT for Geomaterials, GeoX2004. Balkema*, 2004.

- 
- [94] Tarantola A. *Inverse Problem Theory*. Elsevier Science B.V., 1987.
- [95] Taylor D. *Fundamentals of Soil Mechanics*. London Wiley, 1948.
- [96] Triantafyllidis N. *Bifurcation phenomena in pure bending*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 28 :221–245, 1980.
- [97] Tudisco E. *Development and application of time-lapse ultrasonic tomography for laboratory char-acterisation of localized deformation in hard soils / soft rocks*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble, 2013.
- [98] Vardoulakis I. and Aifantis E. *A gradient flow theory of plasticity for granular materials*. *Acta Mechanica*, 87 :197–217, 1991.
- [99] Vardoulakis I., Goldscheider M., and Gudehus G. *Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem*. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2 :99–128, 1978.
- [100] Vardoulakis I. and Sulem J. *Application of bifurcation theory to rock mechanics problems*. *Comprehensive Rock Mechanics*, 1993.
- [101] Wang X. *Modélisation numérique des problèmes avec localisation de la déformation en bandes de cisaillement*. Ph.D. thesis, Université de Liège, 1993.
- [102] Wepmner G. *Discrete approximations related to nonlinear theories of solids*. *International Journal of Solids and Structures*, 7 :1581–1599, 1971.
- [103] Zervos A., Papanastasiou P., and Vardoulakis I. *A finite element displacement formulation for gradient elastoplasticity*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :1369–1388, 2001.