



**HAL**  
open science

## Erosion interne et rupture dans les sols grenus

Luc Sibille

► **To cite this version:**

Luc Sibille. Erosion interne et rupture dans les sols grenus. Géotechnique. Grenoble 1 UGA - Université Grenoble Alpe, 2016. tel-01345486

**HAL Id: tel-01345486**

**<https://hal.univ-grenoble-alpes.fr/tel-01345486>**

Submitted on 13 Jul 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Présenté par

**Luc SIBILLE**

préparée au sein du **Laboratoire Sols Solides Structures Risques**  
dans l'École Doctorale : **Ingénierie - Matériaux, Mécanique, Environnement,**  
**Energétique, Procédés, Production**

# Erosion interne et rupture dans les sols grenus

Version éditée sans le chapitre 3 : « Perspectives »

Soutenu publiquement le **06 juillet 2016**,  
devant le jury composé de :

<b>M. Eduardo ALONSO</b> Professeur à l'Universitat Politècnica de Catalunya	Rapporteur
<b>M. Guillaume CHAMBON</b> Chargé de Recherche (HDR), IRSTEA	Rapporteur
<b>M. Farhang RADJAI</b> Directeur de Recherche au CNRS	Rapporteur
<b>M. Christian GEINDREAU</b> Professeur à l'Université Grenoble Alpes	Président
<b>M. Didier MAROT</b> Professeur à l'Université de Nantes	Membre
<b>M. François NICOT</b> Directeur de Recherche à l'IRSTEA	Membre



## Résumé

Les travaux de recherche présentés dans le cadre de cette habilitation s'intéressent aux sols vus comme des matériaux granulaires, dans l'objectif de décrire : d'une part leurs propriétés de résistance au cisaillement, et d'autre part les processus d'altération de ces propriétés en cas d'érosion interne, principalement de type suffusive. Dans les deux cas, les approches développées s'appuient en grande partie sur la méthode numérique des éléments discrets (DEM). Néanmoins les travaux sur l'érosion interne ont conduit à prendre en compte les interactions entre phase fluide et phase solide via des méthodes couplées de type DEM-CFD (Computational Fluid Dynamics) ; et à utiliser des essais de caractérisation en laboratoire, les données expérimentales disponibles restant limitées à l'heure actuelle.

Ces travaux ont permis de caractériser les différentes étapes d'une érosion suffusive dans un milieu granulaire. Ils ont également conduit à décrire le détachement de particules solides à partir de la puissance d'écoulement du fluide. Cette interprétation présente une alternative à celle plus classique considérant la contrainte visqueuse de cisaillement du fluide. Toutefois, dès lors qu'un phénomène d'auto-filtration intervient dans le déroulement de l'érosion interne, l'interprétation se complique. Il apparaît alors indispensable de comprendre et décrire les mécanismes impliqués d'une part dans les étapes de transport, redéposition, relargage, des particules et d'autre part dans les transition entre ces étapes. Des propositions sont faites en ce sens, aussi bien dans un contexte phénoménologique simplifié, que sur la base d'observations « micro-mécaniques ». Pour compléter cette description, une investigation a été menée sur l'impact possible d'un phénomène suffusif sur les propriétés de rupture d'un sol. Les conclusions restent limitées du fait, entre autres, de la granulométrie considérée (très étroite). Des travaux sont en cours afin d'étendre beaucoup plus largement cette étude.

Concernant les travaux sur les propriétés de résistance au cisaillement des sols, ceux-ci ont conduit à proposer une définition des états limites plus générale que celle propre aux états limites en contraintes. Ces états limites généralisés sont définis dans un espace mixte c'est-à-dire faisant intervenir à la fois des variables de contraintes et des variables de déformation. On rappelle les notions de chemin de chargement, paramètre de chargement, et paramètre de contrôle qui permettent de conduire un matériau à de tels états limites généralisés, et qui conditionnent l'occurrence effective de la rupture. Les caractéristiques du développement de la rupture sont ensuite discutées vis-à-vis du régime de déformation (de quasi-statique à dynamique) et du mode de rupture (localisé ou diffus).



## **Préambule**

*Dans sa version complète ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches inclut un chapitre 3 d'une douzaine de pages intitulé « Perspective ». Cette version du mémoire destinée à être mise en ligne a été éditée en supprimant le contenu de ce chapitre. Rappelons qu'une partie de celui-ci est consacrée à dresser le bilan des résultats et conclusions exposés dans les premiers chapitres de ce mémoire et à présenter, sur la base de ce bilan, les nouveaux travaux amorcés. Ce chapitre « Perspective » est également l'occasion de discuter des travaux de recherche envisagés à plus long terme.*

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Dégradation par érosion interne</b>	<b>5</b>
1.1 Modèle numérique couplé DEM-LBM . . . . .	7
1.1.1 Origines de la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) . . . . .	7
1.1.2 Quelques indications sur la LBM et le modèle de réseau D2Q9 . . . . .	8
1.1.3 Définition du couplage DEM-LBM . . . . .	9
1.1.3.1 Bilan sur les échanges de quantité de mouvement . . . . .	9
1.1.3.2 Correspondance des pas de temps . . . . .	10
1.1.3.3 Equations de la dynamique sur les grains solides . . . . .	11
1.1.3.4 Mise à jour du réseau LBM . . . . .	12
1.2 Détachement des grains solides / initiation de l'érosion . . . . .	13
1.2.1 modèle numérique d'érosion de trou . . . . .	13
1.2.2 Détachement et contrainte de cisaillement hydraulique . . . . .	13
1.2.3 Détachement et puissance d'écoulement fluide . . . . .	14
1.2.3.1 Définition de la puissance d'écoulement . . . . .	15
1.2.3.2 Un régime d'érosion fixé par la puissance d'écoulement ? . . . . .	17
1.3 Caractérisation en laboratoire sur matériaux pulvérulents . . . . .	19
1.3.1 Cellule oedo-perméamétrique et matériaux modèles . . . . .	19
1.3.2 Erodimètre sans confinement . . . . .	19
1.3.3 Un processus d'érosion en 2 étapes . . . . .	21
1.3.4 Une interprétation basée sur la puissance d'écoulement . . . . .	21
1.4 Réponses mécaniques induites par l'érosion de suffusion . . . . .	25
1.4.1 Première approche expérimentale à l'oedo-perméamètre . . . . .	25
1.4.2 Modèle numérique discret de dégradation par érosion . . . . .	26
1.4.2.1 Modèle numérique et cinétique d'extraction . . . . .	26
1.4.2.2 Réponse mécanique induite par l'extraction de particules . . . . .	27
1.4.3 Approche à partir d'une relation constitutive micromécanique . . . . .	30
1.5 Conclusion . . . . .	31
<b>2 Une interprétation de la rupture dans les sols sur la base d'expériences numériques discrètes</b>	<b>32</b>
2.1 Généralisation de la notion d'état limite . . . . .	33
2.1.1 Etats limites en contrainte . . . . .	33
2.1.2 Etats limites généralisés . . . . .	34
2.1.2.1 Chemin de chargement, paramètres de chargement, et paramètre de contrôle . . . . .	36
2.1.2.2 Identification des états limites . . . . .	38
2.1.3 Application à des chemins de chargement proportionnels en déformation	39
2.2 Développement de la rupture effective et mode de rupture . . . . .	41
2.2.1 La rupture effective : une bifurcation vers une réponse dynamique . . . . .	41

2.2.1.1	Contrainte interne et chargement externe . . . . .	43
2.2.1.2	Application à des chargement homogènes . . . . .	44
2.2.2	Rupture diffuse et rupture localisée . . . . .	47
2.3	Conclusion . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Perspectives</b>	<b>51</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>52</b>

# Introduction générale

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire s'intéressent de manière générale aux sols vus comme des matériaux granulaires, dans l'objectif de décrire :

- d'une part leurs propriétés de résistance au cisaillement,
- et d'autre part un des processus d'altération de ces propriétés de résistance mécanique : l'érosion interne, principalement de type suffusive.

Dans les deux cas, les approches développées s'appuient en grande partie sur la méthode numérique des éléments discrets (DEM). Néanmoins les travaux sur l'érosion interne ont conduit par nécessité à :

- décrire les interactions entre phase fluide et phase solide et donc à s'appuyer sur des méthodes couplées de type DEM-CFD (Computational Fluid Dynamics),
- utiliser des essais de caractérisation en laboratoire, les données expérimentales à ce sujet restant limitées à l'heure actuelle.

Le développement de travaux de recherche sur l'érosion interne des sols résulte du contexte et du profil des deux postes successifs de Maître de conférences sur lesquels j'ai été recruté, en 2007 à l'IUT de Saint-Nazaire (Institut GeM) puis en 2013 à l'IUT1 de Grenoble (laboratoire 3SR). Les membres de l'équipe de recherche « Interactions Eau-Geomatériaux » du GeM sur le site de St-Nazaire, travaillant sur les sols, s'intéressaient quasi exclusivement à l'érosion interne des sols sur la base d'une approche expérimentale nourrie par un fort développement de dispositifs d'essais originaux. Recruté pour introduire des éléments de modélisation numérique au sein de cette équipe, l'orientation vers cette thématique de l'érosion interne était évidente. Cette thématique s'inscrivait également dans le cadre du profil du poste à Grenoble dédié aux couplages hydromécaniques dans les géomatériaux. Il était alors naturel de poursuivre ces travaux sur l'érosion interne en bénéficiant entre autres des derniers développements réalisés au 3SR concernant les modèles numériques couplés DEM-CFD.

Les travaux dédiés à la description de la rupture ont fait l'objet de mon doctorat au 3SR en collaboration avec l'IRSTEA. Ils se sont poursuivis jusqu'à maintenant sur la lancée induite par la thèse, toujours en lien avec le 3SR et l'IRSTEA, et en collaboration sur un point particulier avec l'Université de Melbourne (Australie). Seuls les travaux postérieurs au doctorat sont présentés dans ce mémoire.

Le corps de ce mémoire s'articule en trois parties principales :

- la première est dédiée à la dégradation des sols par l'érosion interne. On s'attache aussi bien à décrire le phénomène d'érosion en lui-même, c'est-à-dire le détachement, le transport, et la filtration de particules solides sous le jeu des interactions fluide-solide, que les conséquences de l'érosion sur le comportement mécanique du sol. Il est en effet important de savoir si ce dernier est susceptible de se déformer, voire d'entrer en rupture au

cours du processus d'érosion sous un chargement mécanique constant, afin d'anticiper le comportement des ouvrages en terre de retenue d'eau.

- La deuxième partie propose une description généralisée de la rupture, d'un point de vue essentiellement macroscopique (même si les outils utilisés sont basés sur une représentation à la petite échelle du matériau). Dans le cadre proposé les ruptures initiées à partir de la surface limite en contrainte comme celles se développant à l'intérieur de cette surface limite présentent toutes les mêmes conditions d'occurrence, et les mêmes caractéristiques de développement.
- La troisième partie porte sur les perspectives envisagées. Celles-ci se déclinent en deux catégories. D'une part on présentera comment finaliser les travaux relatifs à l'érosion interne, en particulier en fermant la boucle entre processus d'érosion et réponse mécanique sur la base de modèles simplifiés permettant de traiter l'échelle de l'ouvrage. D'autre part, une nouvelle orientation des activités sera proposée plus tournée vers l'innovation en partenariat direct avec les acteurs économiques. On précisera les raisons de cette orientation et le cadre possible pour la mise en œuvre de ces activités.

On notera que, par soucis de concision, la méthode des éléments discrets n'est pas introduite dans ce mémoire. Nous la jugeons comme bien connue maintenant dans le domaine du génie civil (Sibille & Darve 2016). La version classique de cette méthode, telle que proposée par Cundall et coll. (1971, 1979) a été utilisée pour les travaux présentés ici, avec des lois de contact très simples (en général uniquement frottante, ou cohésive et frottante).

De plus, les travaux en marge des deux axes principaux définis dans ce mémoire, même s'ils n'en sont pas totalement déconnectés, ne sont volontairement pas rapportés ici. Il s'agit en particulier de la caractérisation en laboratoire d'assemblages granulaires isostatiques sur des matériaux analogiques (réalisée au cours de mon postdoc à l'Université de Manchester, Sibille et al. 2009), et de l'opportunité d'une étude de la fluidisation localisée de lits granulaires réalisée tout dernièrement (Montellà et al. 2016).

# Chapitre 1

## Dégradation par érosion interne

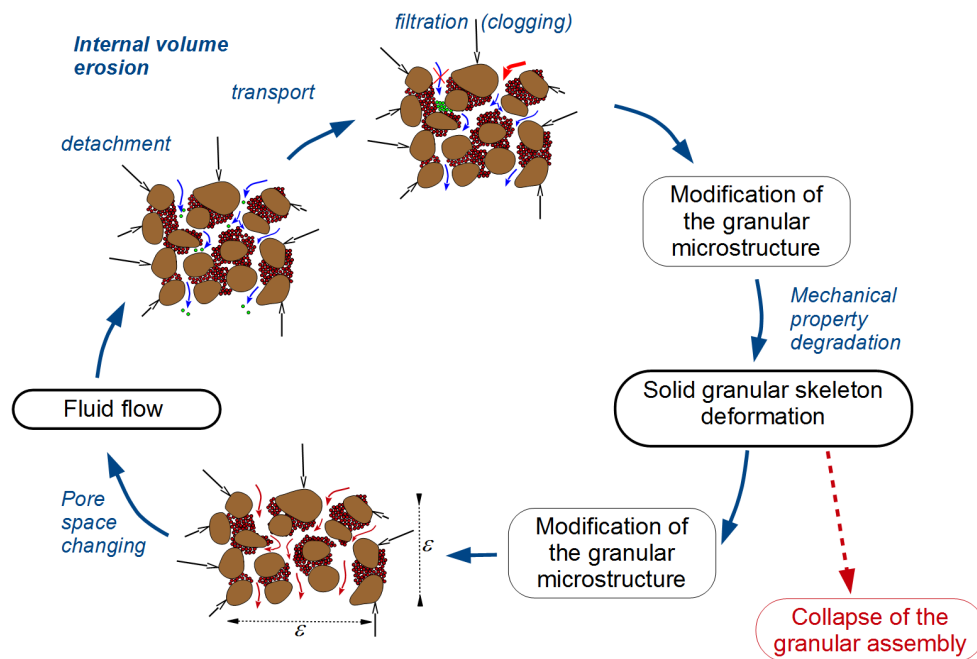
Quatre principaux types d'érosion interne sont identifiables à l'échelle des ouvrages de retenue d'eau et de leurs fondations (Fell & Fry 2007, Bonelli 2012) : (i) l'érosion de conduite (« concentrated leak erosion ») pour laquelle l'écoulement d'eau arrache des particules solides le long d'un chemin préférentiel (dû à une fissure, un trou, un vide ...), (ii) l'érosion régressive apparaissant principalement dans le sol de fondation et progressant depuis la surface libre de la partie avale de l'ouvrage, (iii) la suffusion qui se développe au sein même de la matrice solide du sol, et (iv) l'érosion de contact survenant à l'interface de deux couches de sol, dont l'une est de granulométrie grossière par rapport à l'autre.

Les travaux présentés ici portent principalement sur l'érosion de suffusion qui peut se développer lorsque la granulométrie du sol et son état de densité sont tels que la fraction fine du sol a la possibilité de migrer à travers le réseau poral formé par le squelette granulaire de la fraction grossière. Pour l'ensemble des types d'érosion, les particules solides érodées sont d'abord détachées de la matrice solide, puis transportées par l'action de l'écoulement fluide. Toutefois, le processus de suffusion a la particularité de comporter éventuellement une troisième étape de filtration lorsque les particules transportées sont redéposées dans l'espace interstitiel même du sol, pouvant conduire jusqu'à un colmatage partiel de cet espace (Sail et al. 2011, Reddi et al. 2000).

Par ailleurs, en modifiant la microstructure du sol par évacuation (ou déplacement) d'une partie de la fraction fine, le phénomène de suffusion peut induire localement des modifications des propriétés mécaniques du sol, qui pour un chargement mécanique externe constant, présentera éventuellement des déformations sous l'effet de cette érosion. Ces déformations du squelette granulaire conduisent d'une part à une modification de l'espace poral et donc de l'écoulement interstitiel et du processus de suffusion, et témoignent d'autre part d'un affaiblissement de la résistance mécanique du sol qui peut conduire jusqu'à la rupture.

Les forts couplages mis en jeu au cours de la suffusion entre les phases fluide et solide au cours de trois étapes (elles-mêmes en interaction) de développement du processus (détachement / transport / filtration) en font une problématique complexe, schématisée sur la figure 1.1.

Le cadre formel général pour la description par une approche continue d'un tel problème fluide-solide avec transfert de masse solide a été introduit dans les années 90 à 2000, en particulier par Vardoulakis, Papamichos, et coll. (Vardoulakis et al. 1996, Papamichos et al. 2001, Papamichos & Vardoulakis 2005, Stavropoulou et al. 1998). Toutefois les lois physiques à prendre en compte dans ce cadre là, pour la description de l'érosion de suffusion en-soi, et pour traduire ses conséquences sur les propriétés hydrauliques et mécaniques du sol sont toujours à préciser et font l'objet de ce chapitre.



**FIGURE 1.1** – Différentes étapes du processus de suffusion et couplage possible entre comportement mécanique du sol et développement de la suffusion.

Les travaux réalisés portent en grande partie sur des expériences numériques discrètes, basées sur la méthode des éléments discrets (DEM), elle-même couplée, lorsque nécessaire, à la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) pour décrire les interactions avec la phase fluide. Ces travaux sont aussi fondés sur une approche expérimentale de laboratoire bénéficiant des appareils d'essais originaux développés à l'institut GeM. Le projet EMERMOD (2008-2012, pari scientifique de la Région Pays de la Loire) a constitué un cadre important pour le développement et la mise en œuvre des travaux numériques appuyés par les postdocs de Luc Scholtès (2009) et Franck Lominé (2009-2011). Quant à l'approche expérimentale, celle-ci a été menée en collaboration avec Didier Marot du GeM, à travers les thèses de Yacine Sail (2008-2012) et Abdul Rochim (2012-2015).

Dans une première partie de ce chapitre on s'intéresse à la description du processus d'érosion (sans faire le lien avec le comportement mécanique du sol). Pour décrire le détachement de particules solides sous l'action d'un écoulement fluide, un couplage entre les méthodes numériques des éléments discrets et de Boltzmann sur réseau (DEM-LBM) a été mis en place. Aussi, on présente tout d'abord la mise en œuvre de ce couplage, pour ensuite proposer une interprétation de l'étape de détachement des particules solides sur la base des résultats numériques obtenus.

Dans un second temps, sur la base de données expérimentales, on montrera que le développement de la suffusion peut être marqué de phases érosives successives : le processus d'érosion initialement limité par une étape prédominante de filtration des particules transportées, peut être relancé par re-mobilisation des particules précédemment filtrées. On tentera alors d'étendre l'interprétation issue des premiers résultats numériques à ces données expérimentales.

Enfin, on terminera ce chapitre sur une exploration de la réponse mécanique d'un assemblage granulaire induite par le développement d'une érosion suffusive. Pour cela on se basera à nouveau sur un modèle numérique discret, et les résultats seront comparés à ceux issus d'une relation constitutive obtenue par homogénéisation statistique.

A noter que les discussions sur la thématique de ce chapitre, toujours active à l'heure actuelle, sont poursuivies dans le chapitre 3 de ce mémoire dédié aux perspectives.

## 1.1 Modèle numérique couplé DEM-LBM

L'objectif de l'implémentation d'un couplage entre la méthode des éléments discrets (pour représenter la phase granulaire solide) et une méthode de description de la dynamique du fluide interstitiel était de pouvoir réaliser des expériences numériques complémentaires aux essais de laboratoires (décrits plus loin dans la partie 1.3) car permettant d'accéder à des informations à des échelles différentes (échelle du volume élémentaire représentatif pour les expériences de laboratoire, échelle du grain ou du pore pour les expériences numériques). Il était donc nécessaire d'utiliser un couplage limitant au maximum l'introduction de paramètres ou de lois phénoménologiques pour que les simulations numériques puissent être considérées comme *ab initio* pour constituer des expériences numériques. Par exemple, la perméabilité du milieu granulaire, ou les forces de traînée sur les grains solides devaient constituer des résultats de la simulation et non des données d'entrée définies de manière plus ou moins approchées, éventuellement sur la base de loi approchées.

La méthode de Boltzmann sur réseau (Lattice Boltzmann Method, LBM) remplissait cette condition. Par ailleurs, elle permet de prendre en compte assez facilement des frontières au domaine fluide (constituées par les grains solides) de géométrie complexe et en mouvement, et son implémentation est relativement aisée. Ce sont ces raisons qui nous ont conduit à choisir la LBM pour décrire la dynamique de la phase fluide.

### 1.1.1 Origines de la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM)

La méthode de Boltzmann sur réseau est basée sur l'équation de Boltzmann (1872) établie dans le cadre de la théorie cinétique des gaz. L'équation de Boltzmann implique un opérateur de collision binaire pour décrire l'évolution spatiale et temporelle d'une fonction de distribution de particules représentant la probabilité de trouver des particules de gaz dans l'espace et dans le temps avec une quantité de mouvement donnée. Plus tard, Enskog (1917) et Chapman & Cowling (1991) ont montré qu'il existe un lien direct entre l'équation de Boltzmann et l'équation de Navier-Stokes, en introduisant un opérateur de collision plus complexe traitant des collisions multiples.

En 1954, Bhatnagar, Gross, & Krook (1954) ont proposé un opérateur de collision simplifié, communément appelé l'opérateur BGK, basé sur une fonction d'équilibre vers laquelle se relaxe le fonction de distribution suivant un temps caractéristique  $\tau$ . Cela revient en apparence à linéariser l'opérateur de collision de Boltzmann. Par ailleurs, en 1973, le premier automate cellulaire de gaz, ou gaz sur réseau (Lattice Gas Cellular Automaton, LGCA) a été présenté par Hardy et coll. (1973, 1976). Les LGCA visent à décrire un écoulement fluide à l'échelle macroscopique sur la base d'un modèle "microscopique" extrêmement simplifié d'interactions entre particules, où le temps, l'espace, ainsi que les vitesses de propagation des particules sont discrétisées. Pour cela, les LGCA comportent deux étapes séquentielles : l'étape de collision et l'étape de propagation. L'établissement de l'équation de Boltzmann sur réseau (Lattice Boltzmann Equation, LBE) (McNamara & Zanetti 1988), résulte du lien qui a pu être établi entre les LGCA et l'équation de Boltzmann (Frisch et al. 1987, Wolfram 1986). La LBM classique est ensuite née en adoptant l'opérateur de collision BGK (Chen et al. 1992, Qian et al. 1992), qui conduit au modèle de Navier-Stokes en s'appuyant sur le développement de Chapman-Enskog (Succi 2001, Chin 2002).



### 1.1.2 Quelques indications sur la LBM et le modèle de réseau D2Q9

Le choix a été fait de coupler la DEM avec l'une des formes les plus couramment mises en oeuvre de la LBM, utilisant l'opérateur de collision simplifié BGK sur un réseau bidimensionnel à 9 directions de propagation des particules fluides, dit D2Q9 (Qian et al. 1992). Ce réseau à maille carrée représenté sur le figure 1.2a est caractérisé par un pas d'espace  $h$ , et 9 directions de propagations notées  $\vec{e}_i$ . A partir d'un nœud du réseau, huit de ces directions ( $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ ) sont dirigées vers les huit premiers nœuds voisins, alors que la 9<sup>ième</sup> direction (numérotée  $i = 0$ ) pointe vers le nœud d'origine lui-même représentant les particules fluides immobiles.

Par conséquent neuf composantes de la fonction de distribution (ou densité de probabilité)  $f_i(\vec{x}, t)$  sont à considérer, représentant chacune la probabilité de trouver à la position  $\vec{x}$  et au temps  $t$  des particules fluides avec une quantité de mouvement dirigée suivant la direction  $\vec{e}_i$ .

L'application de la LBM repose sur un processus itératif sur le temps. Chaque pas de temps numérique  $dt$  comporte une étape de collision, puis une étape de propagation.

Au cours de l'étape de collision, les particules fluides interagissent selon l'opérateur BGK défini par :

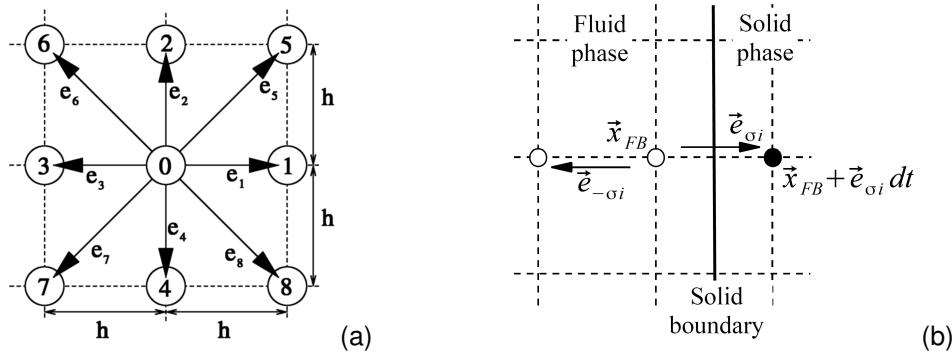
$$f_i(\vec{x}, t^+) = f_i(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)], \quad (1.1)$$

où  $t^+$  représente le temps post-collision,  $\tau$  est un temps de relaxation adimensionnel relié à la viscosité cinématique du fluide  $\nu$ , et  $f_i^{eq}$  est une fonction d'équilibre paramétrée par la vitesse macroscopique  $\vec{v}$  du fluide ainsi que sa densité  $\rho$  au nœud considéré. Pour un fluide newtonien la fonction d'équilibre s'écrit :

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left( 1 + \frac{3}{C^2} \vec{e}_i \cdot \vec{v} + \frac{9}{2C^4} (\vec{e}_i \cdot \vec{v})^2 + \frac{3}{2C^2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right), \quad (1.2)$$

où  $w_i$  représente des pondérations ( $w_0 = 4/9$ ,  $w_{1,2,3,4} = 1/9$  et  $w_{5,6,7,8,9} = 1/36$  pour le modèle D2Q9),  $C = h/dt$  est la vitesse de réseau, et  $\vec{e}_i$  les vitesses discrètes de propagation définies pour le modèle D2Q9 par :

$$\vec{e}_i = \begin{cases} (0, 0) & \text{if } i = 0 \\ C \left( \cos \frac{\pi(i-1)}{2}, \sin \frac{\pi(i-1)}{2} \right) & \text{for } i = 1, \dots, 4 \\ \sqrt{2}C \left( \cos \frac{\pi(2i-9)}{4}, \sin \frac{\pi(2i-9)}{4} \right) & \text{for } i = 5, \dots, 8 \end{cases} \quad (1.3)$$



**FIGURE 1.2** – Définition du réseau et des vitesses discrètes  $e_i$  du modèle D2Q9 utilisé pour la LBM (a) ; définition d'un lien frontière  $\sigma_i$  (b).

L'étape de propagation réalisée après celle de collision, consiste à transporter, à la fin du pas de temps  $dt$  les fonctions de distribution post-collision sur les nœuds voisins en suivant les vitesses discrètes  $\vec{e}_i$  telle que :

$$f_i(\vec{x} + \vec{e}_i dt, t + dt) = f_i(\vec{x}, t^+), \quad (1.4)$$

où  $\vec{x} + \vec{e}_i dt$  représente la position du nœud le plus proche voisin de celui à la position  $\vec{x}$ , suivant la  $i^{\text{ème}}$  direction.

Finalement, la densité (macroscopique) du fluide à un nœud est donnée par la probabilité de trouver des particules fluides à ce nœud quelques soient les directions de propagation, soit :

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i$$

et la vitesse macroscopique en ce même nœud est simplement déduite de la quantité de mouvement globale en ce nœud :

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^8 f_i \vec{e}_i$$

L'application classique de la LBM suppose que le fluide est compressible, et la pression  $p$  du fluide est reliée à sa densité via l'équation d'état  $p = c_s^2 \rho$ , avec  $c_s = C/\sqrt{3}$  la vitesse du son (propre au réseau). Pour un nombre de Mach  $M = v_{\max}/C$  (avec  $v_{\max}$  la plus haute vitesse de l'écoulement fluide) suffisamment petit (typiquement  $M < 0,1$  voire  $< 0,01$ ) la compressibilité du fluide reste négligeable et les champs de vitesse et pression décrits par la LBM tendent vers la solution donnée par le modèle de Navier-Stokes incompressible.

### 1.1.3 Définition du couplage DEM-LBM

#### 1.1.3.1 Bilan sur les échanges de quantité de mouvement

Puisque l'ingrédient de base de la LBM est la fonction de distribution  $f(\vec{x}, t)$  représentant des particules fluides associées à une quantité de mouvement, le couplage entre la LBM et la DEM se traduit par la description des échanges de quantité de mouvement entre phase fluide et phase solide.

Comme représenté sur la figure 1.2b, des particules fluides peuvent rencontrer, au cours de l'étape de propagation, suivant une direction  $i$ , une frontière solide (qui dans notre cas sera constituée par la frontière d'un grain solide circulaire). Nous notons cette direction  $\sigma_i$ . La condition de non glissement du fluide sur la frontière solide est décrite en appliquant la méthode dite du « bounce-back », qui consiste à renvoyer les particules fluides se propageant suivant le direction  $\sigma_i$  dans la direction opposée  $-\sigma_i$ . Ce renvoi complet traduit le fait qu'il n'y a aucun échange de quantité de mouvement entre le fluide et le solide. Toutefois, de manière plus générale, la frontière solide est animée d'une vitesse  $\vec{V}_b$  qui doit être prise en compte afin de décrire l'échange de quantité de mouvement du solide vers le fluide, ce qui est fait via la règle de « bounce-back » modifiée (Ladd 1994) :

$$f_{-\sigma_i}(\vec{x}_{\text{FB}}, t + dt) = f_{\sigma_i}(\vec{x}_{\text{FB}}, t^+) - 2\alpha_i \vec{V}_b \cdot \vec{e}_i, \quad (1.5)$$

où  $\vec{x}_{\text{FB}}$  représente un nœud du réseau situé dans le domaine fluide et possédant un moins une direction discrète  $\sigma_i$  pointant vers une frontière solide, et  $\alpha_i = 3w_i\rho/C^2$  est une constante. La vitesse de la frontière solide  $\vec{V}_b$  au point considéré est aisément déterminée à partir des vitesses en translation et en rotation des grains solides fournies par la DEM.

Remarquons que le dernier terme de l'équation 1.5 représente le transfert de quantité de mouvement du solide vers le fluide. De plus, cette règle de « bounce-back » simple suppose que la frontière solide est à mi-distance entre deux nœuds du réseau LBM, ce qui représente une approximation par rapport à la position réelle de la frontière solide (voir la figure 1.3) <sup>1</sup>.

L'action du fluide sur le solide est traduite en exprimant le torseur des actions hydrodynamiques s'appliquant sur chaque grain solide. Pour cela on écrit tout d'abord la quantité de mouvement  $\vec{\Pi}_{\sigma_i}$  cédée par le fluide au solide pour chaque direction  $\sigma_i$  à mi-temps de l'étape de propagation (la frontière solide étant supposée à mi-distance entre deux nœuds fluides) (Lominé et al. 2013) :

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}_{\sigma_i}(t + 1/2 dt) &= f_{\sigma_i}(\vec{x}_{\text{FB}}, t^+) \vec{e}_{\sigma_i} - f_{-\sigma_i}(\vec{x}_{\text{FB}}, t + dt) \vec{e}_{-\sigma_i} \\ &= \vec{e}_{\sigma_i} [f_{\sigma_i}(\vec{x}_{\text{FB}}, t^+) + f_{-\sigma_i}(\vec{x}_{\text{FB}}, t + dt)] \\ &= 2 \vec{e}_{\sigma_i} \left[ f_{\sigma_i}(\vec{x}_{\text{FB}}, t^+) - \alpha_i \vec{V}_b \cdot \vec{e}_i \right]\end{aligned}\quad (1.6)$$

La contribution  $\vec{F}_{\sigma_i}$  du lien  $\sigma_i$  à la force hydrodynamique sur le grain solide est ensuite obtenue par dérivation par rapport au temps de la quantité de mouvement calculée à l'équation 1.6 et intégrée sur la surface d'une maille du réseau,  $\vec{F}_{\sigma_i} = (\vec{\Pi}_{\sigma_i} h^2)/dt$ , soit :

$$\vec{F}_{\sigma_i}(t + 1/2 dt) = 2 \frac{h^2}{dt} \left[ f_{\sigma_i}(\vec{x}_{\text{FB}}, t^+) - \alpha_i \vec{V}_b \cdot \vec{e}_i \right] \vec{e}_{\sigma_i} \quad (1.7)$$

Les éléments de réduction du torseur des actions hydrodynamiques au centre d'un solide circulaire comporte également un moment dont la contribution du lien  $\sigma_i$  est donnée par :

$$\vec{M}_{\sigma_i}(t + 1/2 dt) = \vec{r}_{\sigma_i} \wedge \vec{F}_{\sigma_i}(t + 1/2 dt) \quad (1.8)$$

avec  $\vec{r}_{\sigma_i}$  le vecteur joignant le centre du grain solide au milieu du lien frontière  $\sigma_i$ .

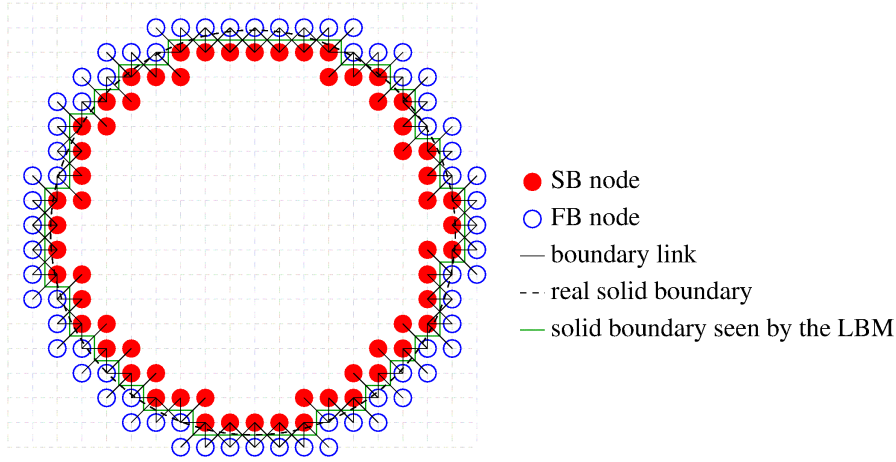
Finalement les composantes du torseur des actions hydrodynamiques ( $\vec{\mathcal{F}}_h$ ,  $\vec{\mathcal{M}}_h$ ) sur un grain solide  $p$  sont obtenues en sommant les contributions sur l'ensemble des liens  $\sigma_i$  définissant la frontière  $\Gamma_p$  de ce grain, soit :

$$\vec{\mathcal{F}}_h(t + 1/2 dt) = \sum_{\sigma_i \in \Gamma_p} \vec{F}_{\sigma_i}(t + 1/2 dt) \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_h(t + 1/2 dt) = \sum_{\sigma_i \in \Gamma_p} \vec{M}_{\sigma_i}(t + 1/2 dt) \quad (1.9)$$

### 1.1.3.2 Correspondance des pas de temps

Pour une phase liquide représentative de l'eau et une phase solide représentative de grains de silice, le pas de temps de calcul associé à la DEM,  $dt_{\text{DE}}$ , (nécessaire pour assurer la stabilité du schéma d'intégration explicite) est plus petit que le pas de temps de la LBM noté  $dt$  (dépendant de la viscosité, du temps de relaxation, et du pas d'espace). Par conséquent, pour assurer la correspondance des temps physiques simulés par chacune des méthodes numériques le cycle de la DEM apparaît comme un sous cycle de celui de la LBM. Comme il est plus simple de jouer sur la pas de temps de la DEM, ce dernier est réduit à une nouvelle valeur  $dt'_{\text{DE}} = dt/n$ , avec  $n$  l'entier supérieur ou égal au rapport  $dt/dt_{\text{DE}}$ . Ainsi pour un pas de temps

1. Il existe des règles de « bounce-back » pondérées qui permettent de mieux décrire la position de la frontière solide. Toutefois, nous avons jugé que l'erreur résultant de cette première approche restait faible pour les problèmes qui nous intéressaient avec une discrétisation du domaine fluide suffisamment fine (au moins 10 nœuds fluides dans un diamètre de grain solide).



**FIGURE 1.3** – Grain solide circulaire positionné sur le réseau LBM avec représentation des liens frontières  $\sigma_i$  positionnés entre deux nœuds du réseau dénommés nœud frontière fluide (FB node) et nœud frontière solide (SB node) situés respectivement dans le domaine fluide et le domaine solide (d’après Lominé et al. 2013).

de calcul de la LBM,  $n$  pas de temps DEM sont réalisés au cours desquels le torseur des actions hydrodynamiques appliqué sur les grains solides (Eq. 1.9) est gardé constant.

Comme dans le couplage considéré  $dt > dt'_{DE}$ , la DEM peut décrire des phénomènes physiques caractérisés par une fréquence plus grande que celle pouvant être décrite par la LBM. Il faut donc veiller lors de la mise en application d’un tel couplage numérique que des vibrations de grains solides à une fréquence trop élevée pour la LBM ne viennent pas altérer la résolution des interactions fluide-solide décrites précédemment. Une manière indirecte de limiter cet éventuel problème consiste à limiter la valeur de  $n$  (nous nous sommes toujours limité à  $n < 10$  pour les applications décrites dans ce document), ce qui engendre certaines contraintes dans le choix des paramètres des modèles DEM et LBM.

### 1.1.3.3 Equations de la dynamique sur les grains solides

Le mouvement de chaque grain solide est déduit du principe fondamental de la dynamique qui s’écrit dans la DEM, en prenant en compte sur chaque grain le torseur des actions des contacts inter-granulaires ( $\vec{\mathcal{F}}_c, \vec{\mathcal{M}}_c$ ) et des actions hydrodynamiques ( $\vec{\mathcal{F}}_h, \vec{\mathcal{M}}_h$ ) :

$$M \ddot{\vec{x}}(t) = \vec{\mathcal{F}}_c(t) + \vec{\mathcal{F}}_h(t), \quad (1.10)$$

$$I \ddot{\vec{\omega}}(t) = \vec{\mathcal{M}}_c(t) + \vec{\mathcal{M}}_h(t), \quad (1.11)$$

où  $M$  et  $I$  sont respectivement la masse et l’inertie du grain solide.

$\vec{\mathcal{F}}_h$  et  $\vec{\mathcal{M}}_h$  au temps  $t$  sont déduits de l’équation 1.9 en moyennant les valeurs calculées avec la LBM à deux pas de temps consécutifs :

$$\vec{\mathcal{F}}_h(t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{\mathcal{F}}_h(t - 1/2 dt) + \vec{\mathcal{F}}_h(t + 1/2 dt) \right], \quad (1.12)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_h(t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{\mathcal{M}}_h(t - 1/2 dt) + \vec{\mathcal{M}}_h(t + 1/2 dt) \right]. \quad (1.13)$$

#### 1.1.3.4 Mise à jour du réseau LBM

Les grains solides sont amenés à se déplacer sur le réseau LBM, aussi des nœuds du réseau initialement couverts par un grain solide (nœuds solides) peuvent se retrouver dans le domaine fluide (nœuds fluides), et inversement des nœuds fluides vont devenir des nœuds solides. Pour éviter la création ou la suppression de fonctions de distribution lorsque des nœuds du réseau sont respectivement découverts ou recouverts par un grain solide, le cycle de la LBM (collision, propagation) est appliqué à tous les nœuds du réseau recouverts ou pas par un grain solide. Cela revient à considérer les grains solides vus par la LBM comme des coquilles remplies d'un fluide identique à celui du domaine fluide. Etant donné que pour deux nœuds du réseau, situés de part et d'autre de la frontière solide, les vitesses sont très proches, il n'y a pas lieu d'initialiser les fonctions de distribution d'un nœud solide devenant nœud fluide. C'est un avantage de cette approche.

Toutefois, le mouvement de ces « coquilles » est bien dépendant de la masse et de l'inertie des « véritables » grains solides sur lesquels s'appliquent le torseur des actions hydrodynamiques du fluide inter-granulaire (les actions du fluide intra-coquille ne sont pas calculées et donc pas prises en compte).

## 1.2 Détachement des grains solides / initiation de l'érosion

Dans cette partie, le méthode couplée présentée ci-dessus est mise en œuvre à travers la définition d'un modèle numérique d'érosion de conduit. Ce modèle, servira de base pour la caractérisation du détachement de particules solides sous l'action d'un écoulement d'eau (la dépendance de l'érosion au transport et à la filtration étant dans ce cas négligeable).

### 1.2.1 modèle numérique d'érosion de trou

Le modèle numérique bi-dimensionnel représenté sur la figure 1.4a (Lominé et al. 2013) consiste en un tube rempli dans sa partie centrale de grains solides circulaires cohésifs de diamètre moyen  $d_{mean}$ . Les grains dans l'axe du tube ont été retirés au préalable de manière à former un trou initial de largeur  $d_h \approx 4 d_{mean}$ . Les contacts générés dans la configuration initiale entre les grains et entre les grains et les parois du tube sont cohésifs, avec des cohésions normales,  $C_n$ , et en cisaillement,  $C_s$ , définies sur la figure 1.4b, et telles que  $C_n = C_s = C$ . Cette cohésion est fragile de manière à ce que si la cohésion est rompue le contact devient purement frottant. De plus tout nouveau contact créé en cours de simulation est également purement frottant.

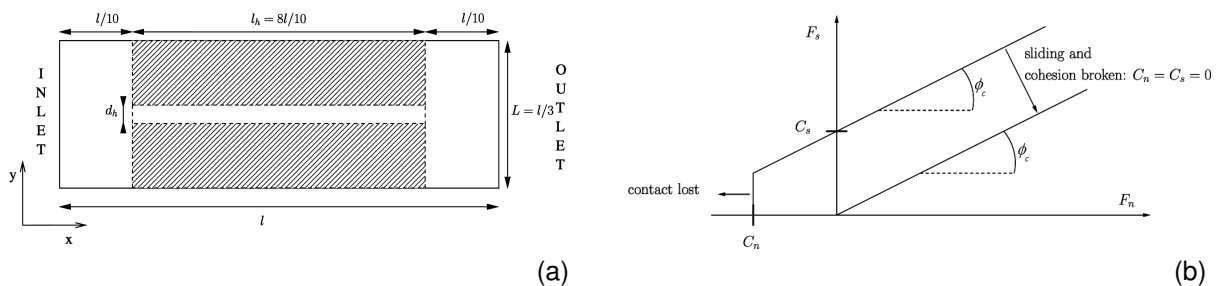
La paroi latérale du tube est imperméable vis-à-vis du fluide et constitue une paroi rigide vis-à-vis des grains solides. Une chute de pression  $\Delta P$  est imposée entre les frontières d'entrée et de sortie du tube afin de générer un écoulement du fluide à travers le trou initialement créé. Cet écoulement est caractérisé par un nombre de Reynolds compris entre 0,50 et 40,0 en fonction du gradient de pression appliqué. Enfin la gravité n'est pas prise en compte dans ces simulations.

Ces simulations représentant environ 200 s de temps physique, et comprenant 800 grains solides et plus de 300 000 nœuds fluides, ont été réalisées pour 10 chutes de pression différentes et 7 valeurs de cohésion de contact.

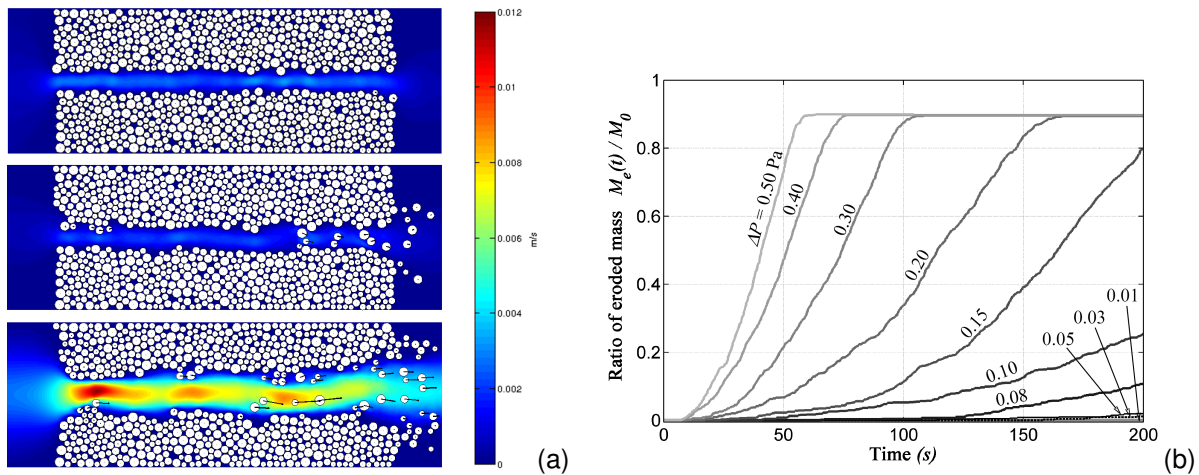
Sous l'action de l'écoulement fluide des grains solides sont détachés du bord du trou, et transportés jusqu'à la section de sortie du tube (Fig. 1.5a). Les grains traversant cette section de sortie sont considérés comme érodés.  $M_e$  est la masse cumulée des grains érodés dont l'évolution typique en fonction de  $\Delta P$  est montrée sur la figure 1.5b.

### 1.2.2 Détachement et contrainte de cisaillement hydraulique

La description classique de l'érosion de trou et de l'érosion de contact consiste à représenter la sollicitation hydraulique par la contrainte de cisaillement  $\tau$  exercée par le fluide sur les parois du trou (Briaud et al. 2001, Partheniades 1965, Parchure and Mehta 1985). Le taux



**FIGURE 1.4** – (a) Modèle numérique d'érosion de trou, l'assemblage granulaire cohésif couvre la région hachurée laissant libre un trou horizontal ( $l = 0.03$  m,  $d_h \approx 0.002$  m); (b) critère de rupture des contacts considérés comme cohésifs fragiles.



**FIGURE 1.5** – (a) Images d'une simulation d'érosion de trou (à  $t = 0.7$  ; 13.3 and 55.0 s) pour une chute de pression  $\Delta P = 0.3$  Pa et une cohésion  $C/d = 1.27$  N/m, l'échelle de couleur est proportionnelle à la vitesse du fluide et la vitesse des grains solides est représentée par des flèches ; (b) ratio de la masse érodée sur la masse solide initiale  $M_0$  pour une cohésion  $C/d = 0.506$  N/m, simulée pour des chutes de pression  $\Delta P$  de 0.01 à 0.50 Pa.

d'érosion par unité de surface du trou  $\dot{\epsilon}$  est alors dépendant de l'excès de cisaillement par rapport à une contrainte seuil  $\tau_c$  en-dessous de laquelle le détachement de grains solides n'est pas généré (Wan & Fell 2004, Haghighi et al. 2013) :

$$\dot{\epsilon} = k_d(\tau - \tau_c) \quad \text{si } \tau > \tau_c \quad (1.14)$$

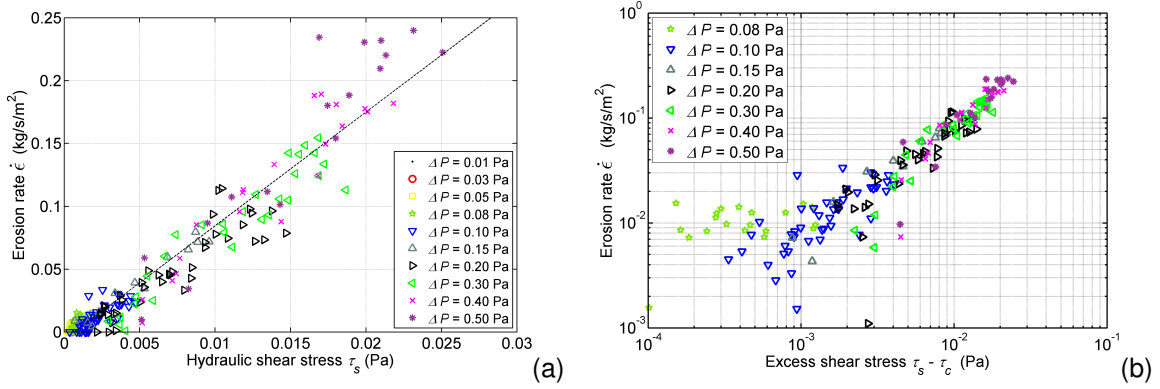
où  $k_d$  est un coefficient d'érosion qui fixe la cinétique de détachement des grains une fois la contrainte seuil franchie.

Notons que cette description du détachement piloté par la contrainte fluide cisillante a également été considérée dans le cas de la suffusion par Bonelli & Marot (2011), qui ont assimilé les pores du sol à des tubes. Les grains sont alors supposés se détacher de la surface de ces tubes (pores) comme dans le cas d'une érosion de trou.

La figure 1.6 montre que les résultats obtenus à partir du modèle numérique présenté dans les sections précédentes sont conformes à cette interprétation. Une étude paramétrique sur la cohésion de contact  $C$  montre que la contrainte seuil de détachement  $\tau_c$  s'accroît avec cette dernière, apparemment de manière linéaire, mais cela reste à confirmer. Le coefficient d'érosion  $k_d$  apparaît indépendant de la cohésion  $C$ , mais là aussi une confirmation portant sur une plus grande amplitude de  $C$  serait nécessaire (Sibille et al., 2015a).

### 1.2.3 Détachement et puissance d'écoulement fluide

L'utilisation de la puissance d'écoulement de l'eau (ou puissance de courant) pour décrire le transport des sédiments dans les cours d'eau a été proposée depuis les années 50 par Bagnold (1956, 1980), mais aussi plus récemment dans le cas de l'érosion de surface (Low 1989, Govers 1992, Ferro 1998). Dans les deux cas, la puissance de courant est définie comme le produit de la contrainte de cisaillement du fluide à l'interface avec le sol et une vitesse moyenne donnant une estimation de la puissance dissipée par cisaillement visqueux dans le fluide à proximité de l'interface de sol/eau. Bagnold (1980) et Govers (1992) montrent que le débit massique de sédiment détaché et transporté est une fonction puissance de la puissance d'écoulement. Marot et al. (2012) et Regazzoni & Marot (2013) ont récemment proposés de décrire également l'érosion interne des sols sur la base de l'énergie dissipée par l'écoulement



**FIGURE 1.6** – Taux d'érosion simulé avec le modèle DEM-LBM pour une cohésion  $C/d = 0.506$  N/m, et décrit comme une fonction linéaire de la contrainte de cisaillement hydraulique : (a) échelle linéaire et (b) échelle logarithmique (les points pour lesquels  $\tau < \tau_c$  ne figurent pas dans ce dernier diagramme).

fluide à travers la porosité du sol.

Ainsi, l'objectif ici est d'étudier la possibilité d'interpréter l'érosion interne des sols, et en particulier la suffusion, à partir de termes énergétiques représentatifs de l'écoulement fluide à travers le sol. Toutefois, l'érosion de surface (terrestre ou bien en fond de lit de rivière) se traduit par la succession de deux étapes : le détachement des particules solides de la phase solide, puis le transport de ces dernières. De même, l'application d'une approche énergétique au cas de l'érosion interne (Marot et al. 2012, Regazzoni and Marot 2013) est plus particulièrement aboutie au sujet de l'érosion de trou, et de l'érosion de jet, qui sont des cas d'érosion d'interface constitués également d'étapes de détachement puis de transport des particules. Pour ce qui est de l'érosion de volume de type suffusive, il s'ajoute aux étapes de détachement et de transport des particules, une éventuelle étape de filtration, marquant une différence qualitative notable par rapport à l'érosion de surface ou en cours d'eau.

L'étude décrite ci-après est volontairement limitée dans un premier temps aux étapes de détachement des particules et de leur transport. Le modèle numérique discret sur lequel ont été réalisés les expériences numériques a justement été conçu afin d'éviter la redéposition (ou la filtration) des particules (le rôle du transport est même secondaire par rapport au détachement dans les cas étudiés). Une fois cette première étude réalisée, on tentera seulement dans un second temps (section 1.3.4) d'inclure la description de la redéposition.

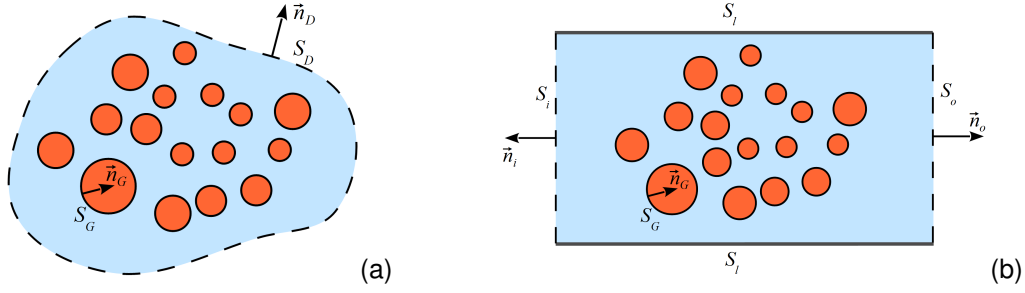
### 1.2.3.1 Définition de la puissance d'écoulement

Considérons un fluide visqueux de volume  $V$  limité par une frontière de surface  $S$  avec un vecteur normal  $\vec{n}$  (pointant vers l'extérieur du domaine fluide). Soit  $\rho$  la densité du fluide,  $p$  sa pression statique et  $\vec{v}$  sa vitesse, enfin  $\vec{g}$  la gravité. L'équation de conservation de l'énergie dans ce volume  $V$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV \right) = & - \int_S \rho \frac{v^2}{2} \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_S p \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_S (\bar{\sigma}^v \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v} dS \\ & + \int_V \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV - \int_V \sigma_{ij}^v \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dans le cas d'un écoulement à travers un milieu granulaire la frontière  $S$  peut être décomposée en une frontière extérieure  $S_D$  et une frontière constituant l'interface avec les grains solides  $S_G$  ( $S_D \cup S_G = S$ ).  $S_D$  est supposé fixe alors que  $S_G$  est mobile, puisque les grains solides peuvent se déplacer (Fig. 1.7a).





**FIGURE 1.7** – Domaine fluide : (a) frontière extérieure  $S_D$  et frontière constituée par le grains solides  $S_G$ , (b) décomposition pour un tube de section constante de la frontière extérieure entre une frontière latérale  $S_l$  et des frontières d'entrée  $S_i$  et de sortie  $S_o$ .

Pour un régime établi, la variation d'énergie cinétique peut être considérée comme nulle soit  $\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV \right) = 0$ . De plus, il n'y a pas de flux d'énergie cinétique à travers une surface imperméable, aussi  $\int_{S_G} \rho \frac{v^2}{2} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$  ( $\vec{v}$  étant ici la vitesse relative du fluide par rapport à la surface  $S_G$ ).

Pour un domaine comme celui considéré dans les applications numériques et les essais de laboratoire, correspondant à un tube,  $S_D$  peut être décomposée en une surface latérale imperméable du tube  $S_l$ , une section d'entrée  $S_i$  et une section de sortie  $S_o$  (Fig. 1.7b). Pour un fluide faiblement compressible les flux d'énergie cinétique à travers  $S_i$  et  $S_o$  s'équilibrent, et pour des vitesses fluides normales à ces sections le travail des contraintes visqueuses sur celles-ci est négligeable. L'équation 1.15 devient alors :

$$-\int_{S_i} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_{S_o} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_G} [p \vec{v} \cdot \vec{n}_G - (\bar{\sigma}^v \cdot \vec{n}_G) \cdot \vec{v}] dS - \int_V \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV + \int_V \sigma_{ij}^v \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (1.16)$$

En utilisant le théorème de la divergence (et pour des changements de volume négligeables) :

$$\int_V \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV = - \int_{S_i+S_o} \rho g z \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_{S_G} \rho g z \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (1.17)$$

Finalement on peut exprimer la puissance de l'écoulement fluide à travers l'assemblage granulaire :

$$-\int_{S_i+S_o} (p + \rho g z) \vec{v} \cdot \vec{n}_o dS = \int_{S_G} [(p + \rho g z) \vec{v} \cdot \vec{n}_G - (\bar{\sigma}^v \cdot \vec{n}_G) \cdot \vec{v}] dS + \int_V \sigma_{ij}^v \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (1.18)$$

Le membre de gauche de l'équation 1.18 (intégrale sur  $S_i$  et  $S_o$ ) représente la puissance fournie au fluide pour s'écouler (travail des forces de pression et de gravité à la frontière du domaine). Dans la suite ce terme est appelé puissance d'écoulement  $P_F$ . L'intégrale sur  $S_G$ , que l'on notera  $I_G$ , représente le transfert d'énergie du fluide aux particules solides, et la dernière intégrale de volume est la puissance dissipée par le travail des contraintes visqueuses au sein du fluide  $P_V$  :

$$P_F = I_G + P_V \quad (1.19)$$

Notons que, tant que les grains solides sont immobiles, la vitesse du fluide relativement à  $S_G$  est nulle et il n'y a aucun transfert d'énergie du fluide vers le solide.

### 1.2.3.2 Un régime d'érosion fixé par la puissance d'écoulement ?

On serait tenté d'interpréter l'action de l'écoulement d'un fluide interstitiel sur la phase solide d'un sol sur la base du terme  $I_G$  de l'équation 1.19. Toutefois, une étude sur des essais de laboratoire de suffusion (Marot et al. 2009, Chang & Zhang 2011, Sail et al. 2011) et d'érosion de trou (Regazzoni & Marot 2013) de la littérature a montré qu'il est difficile d'évaluer ce transfert d'énergie de la phase fluide vers la phase solide. Il semble représenter une fraction négligeable de la puissance d'écoulement  $P_F$  dans le cas de la suffusion et son importance apparaît comme très variable d'un sol à l'autre dans le cas de l'érosion du trou (Sibille et al., 2015a).

Notre attention s'est donc portée sur la puissance d'écoulement, dont la détermination est aisée dans un contexte d'ingénierie à partir d'un débit et d'une perte de charge hydraulique. Par ailleurs cette puissance d'écoulement est principalement dissipée par viscosité (terme  $P_V$  de l'équation 1.19) à proximité directe des interfaces solides (grains solides constituant le squelette granulaire intact et grains détachés en cours de transport), du moins pour les écoulements et les configurations étudiées (voir figure 1.8). Ainsi la puissance d'écoulement  $P_F$  constitue un indicateur des interactions fluide-solide.

Sur la figure 1.9 est représenté le taux d'érosion en fonction de la puissance visqueuse  $P_V^{FB}$  dissipée au niveau des nœuds frontières fluides (nœuds FB) du réseau LBM (cf. Fig. 1.3, p. 11). Ainsi  $P_V^{FB}$  représente la puissance dissipée par viscosité au plus près des frontières des grains solides. Le taux d'érosion peut être interprété ici comme une fonction puissance de  $P_V^{FB}$  sous la forme :

$$\dot{m} \propto (P_V^{FB} - P_V^{FB*})^{\alpha_V} \quad (1.20)$$

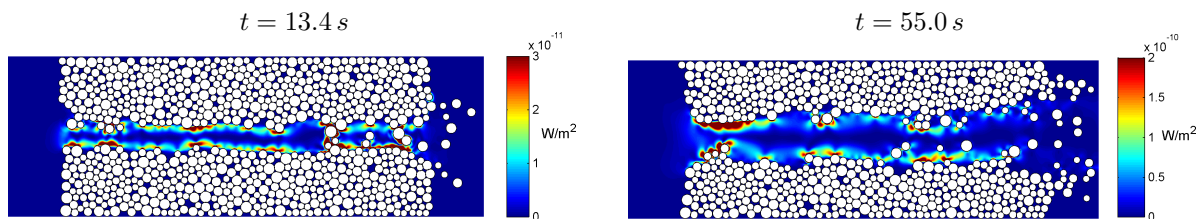
où  $P_V^{FB*}$  est une valeur seuil de puissance visqueuse en-dessous de laquelle le détachement des grains solides n'a pas lieu.

$P_V^{FB}$  n'est pas une grandeur directement accessible d'un point de vue pratique. Aussi une interprétation identique peut être effectuée en considérant la puissance d'écoulement  $P_F$  au lieu de  $P_V^{FB}$  comme représenté sur la figure 1.10. Bien que l'accord avec une loi puissance soit un peu moins bonne que celle décrite précédemment en considérant  $P_V^{FB}$ , le taux d'érosion peut toujours être décrit de manière satisfaisante avec une expression de la forme :

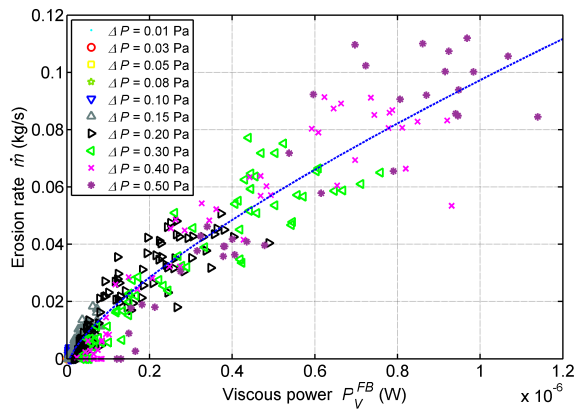
$$\dot{m} \propto (P_F - P_F^*)^{\alpha_F} \quad (1.21)$$

où  $P_F^*$  constitue une valeur seuil de détachement.

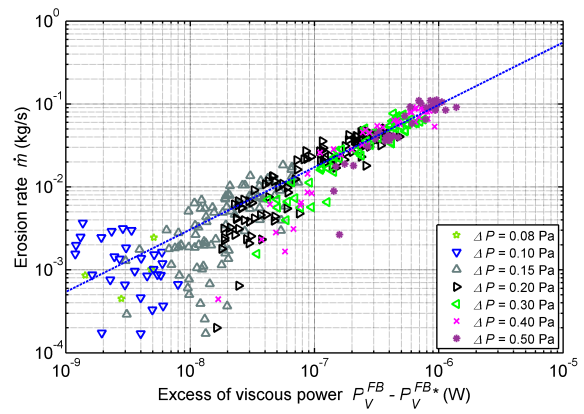
L'avantage d'une telle interprétation porte sur la détermination aisée de la variable de sollicitation hydraulique  $P_F$ , calculée ici comme le produit du débit fluide par la chute de pression appliquée. Ainsi, une telle description de l'érosion interne, en l'absence de filtration, pourrait être assez directement appliquée à l'ingénierie.



**FIGURE 1.8** – Densité de puissance dissipée par viscosité (terme  $P_V$  de l'équation 1.19) à  $t = 13.4 s$  et  $55.0 s$  pour  $C/d = 1.27 N/m$  and  $\Delta P = 0.30 Pa$ .

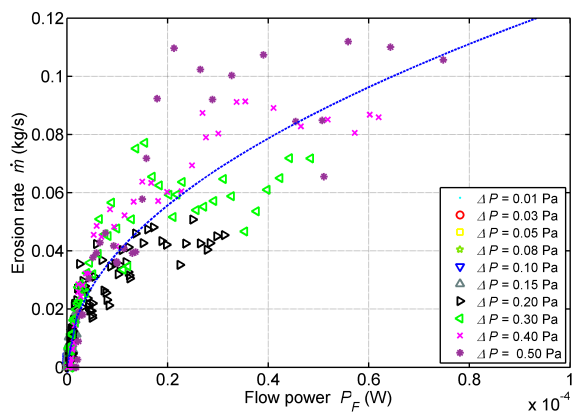


(a)

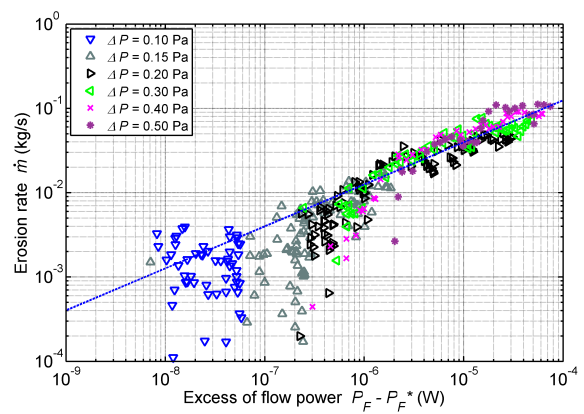


(b)

**FIGURE 1.9** – Dépendance du taux d'érosion à la puissance  $P_V^{FB}$  dissipée par viscosité sur les nœuds frontières fluides pour  $C/d = 1.27$  N/m. Echelle linéaire (a) et logarithmique (b) (les données correspondant à une valeur de  $P_V^{FB}$  inférieure à la valeur seuil  $P_V^{FB*}$  ne sont pas représentées sur l'échelle logarithmique).



(a)



(b)

**FIGURE 1.10** – Dépendance du taux d'érosion à la puissance d'écoulement  $P_F$  pour  $C/d = 1.27$  N/m. Echelle linéaire (a) et logarithmique (b) (les données correspondant à une valeur de  $P_F$  inférieure à la valeur seuil  $P_F^*$  ne sont pas représentées sur l'échelle logarithmique).

## 1.3 Caractérisation en laboratoire sur matériaux pulvérulents

L'approche expérimentale sur la suffusion présentée dans cette partie conduit à se recentrer sur ce type d'érosion où les étapes de détachement, transport et filtration, sont en interaction et difficilement dissociables du point de vue de l'expérimentateur.

### 1.3.1 Cellule oedo-perméamétrique et matériaux modèles

La cellule oedo-perméamétrique de l'Institut GeM (Sail et al. 2011) présentée sur les figures 1.11 et 1.12 permet de réaliser des essais de suffusion sous l'effet d'un écoulement vertical descendant. Les échantillons de sol ou de matériaux modèles (billes de verre) sont reconstruits à l'intérieur du corps de la cellule constitué d'un cylindre en plexiglas, au-dessus d'une grille dont l'ouverture bloque le passage aux grains les plus gros uniquement. Le diamètre des échantillons est de 28 cm et leur hauteur variable de 25 à 60 cm.

Une fois l'échantillon saturé et consolidé sous l'application d'une contrainte verticale, un écoulement d'eau sous perte de charge contrôlée est diffusé à travers le piston supérieur poreux. L'effluent est collecté sous la grille supportant l'échantillon et dirigé vers un dispositif d'échantillonnage pressurisé (permettant le contrôle de la charge hydraulique avale). Ce dispositif d'échantillonnage, équipé d'un plateau tournant supportant une série de paniers, permet de collecter les particules érodées à différents temps de l'essai en plaçant successivement les paniers sous l'exutoire de la cellule.

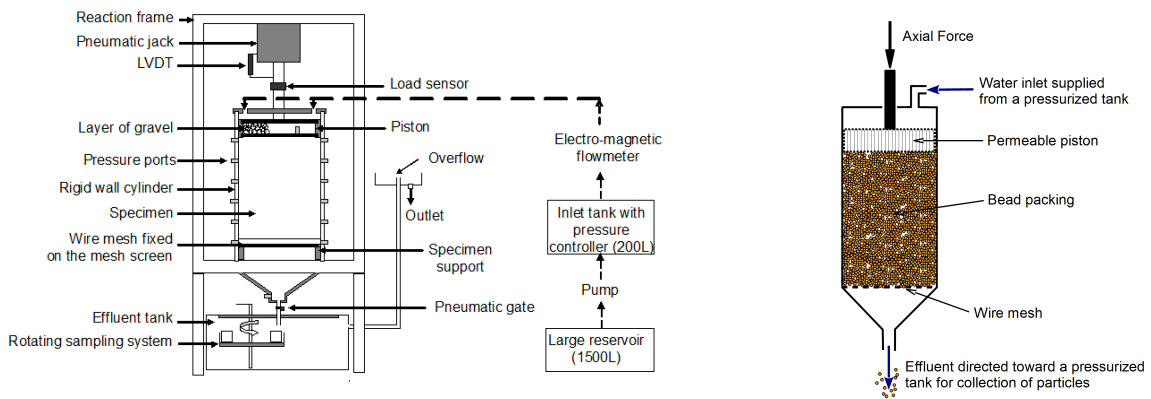
Par ailleurs cette cellule est équipée de 12 prises de pressions installées sur la cellule en plexiglas suivant deux génératrices diamétralement opposées, toutes connectées à un même capteur de pression via un multiplexeur hydraulique (afin d'éviter les dérives relatives entre différents capteurs de pression). Il est ainsi possible de suivre le champ de pression interstitielle en cours d'essais suivant deux profils opposés. De même, comme illustré sur la figure 1.12, un banc gammadensitométrique en translation verticale permet à tout moment de dresser un profil vertical de densité de l'échantillon, dans une bande de 5 cm de large.

La majorité des essais réalisés dans cette cellule ont porté sur des échantillons constitués d'un mélange bi-disperse de billes de verre, composé d'une fraction grossière de 1,2 à 3,4 mm de diamètre, et d'une fraction fine comprise entre 0,1 et 0,2 mm. Les échantillons composés d'une fraction massique en fine de 20 % et 40 % étaient construits sur une grille d'ouverture 1,25 mm laissant libre le passage à la fraction fine.

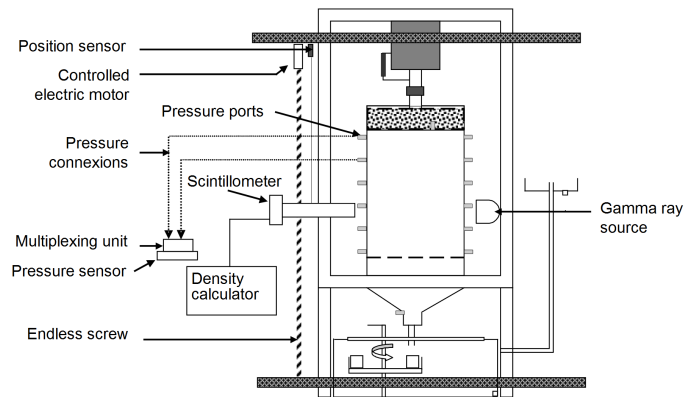
Le programme de chargement hydraulique a systématiquement consisté en un accroissement par palier du gradient hydraulique global appliqué à l'échantillon. Les pas d'accroissement du gradient hydraulique pour chaque palier sont variables de 0,1 à 1 en fonction des essais, pour une durée de palier de 60 min, voire exceptionnellement jusqu'à 5 heures.

### 1.3.2 Érodimètre sans confinement

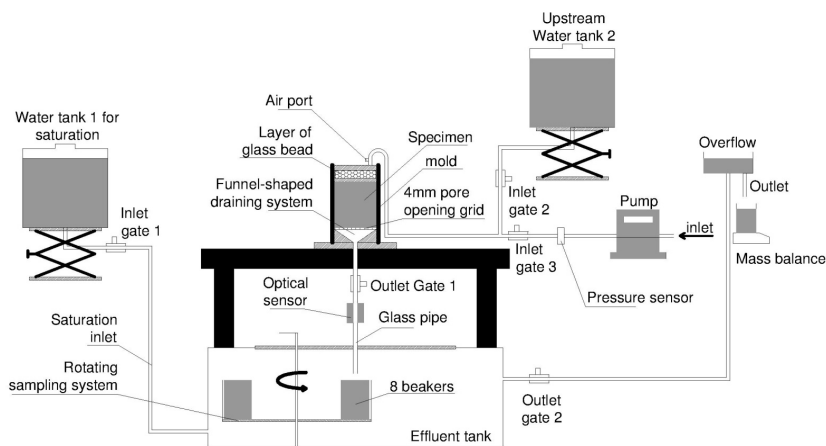
Un autre érodimètre, d'un principe similaire à celui décrit ci-dessus et présenté sur la figure 1.13, a également été utilisé pour caractériser la sensibilité à la suffusion de mélanges de gravier et sable reconstitués en laboratoire. Tout comme le précédent, cet érodimètre a été développé à l'Institut GeM (Bendahmane et al. 2008), toutefois il s'en différencie par sa taille, beaucoup plus petite et nous l'avons utilisé sans appliquer de chargement mécanique externe (même si cela est possible puisqu'il s'agit d'une cellule triaxiale modifiée). Les échantillons de 5 cm de diamètre et 5 cm de haut sont placés dans une membrane imperméable (identique à celles utilisées pour des essais triaxiaux) au dessus d'une grille, et érodés, après saturation, par écoulement vertical descendant. Du fait de la petite taille des échantillons il n'est pas



**FIGURE 1.11** – Oedo-perméamètre : cellule d'érosion de l'Institut GeM (d'après Sail et al. 2011) et son schéma de principe simplifié sur la droite.



**FIGURE 1.12** – Principe du dispositif de mesure de densité par rayonnement Gamma monté sur l'oedo-perméamètre (d'après Sail et al. 2011).



**FIGURE 1.13** – Erodimètre sans confinement de l'Institut GeM (sur la base de l'érodimètre triaxial développé par Bendahmane et al. 2008).

possible de placer des capteurs de pression locaux et seul le gradient hydraulique global est accessible. La masse solide contenue dans l'effluent est accessible, toujours en utilisant un échantillonneur rotatif et pressurisé. Les essais d'érosion peuvent être réalisés soit à gradient hydraulique contrôlé, soit à débit contrôlé. Les essais sur ce dispositif ont principalement porté sur des mélanges de gravier et de sable.

### 1.3.3 Un processus d'érosion en 2 étapes

Les essais sur les deux types d'érodimètre présentés aux sections précédentes et sur les deux types de matériaux (billes de verre et gravier sableux) ont montrés, lors d'essais à charge hydraulique contrôlée (avec accroissement par palier du gradient hydraulique global), que le processus d'érosion interne se déroule dans ces matériaux en deux étapes distinctes :

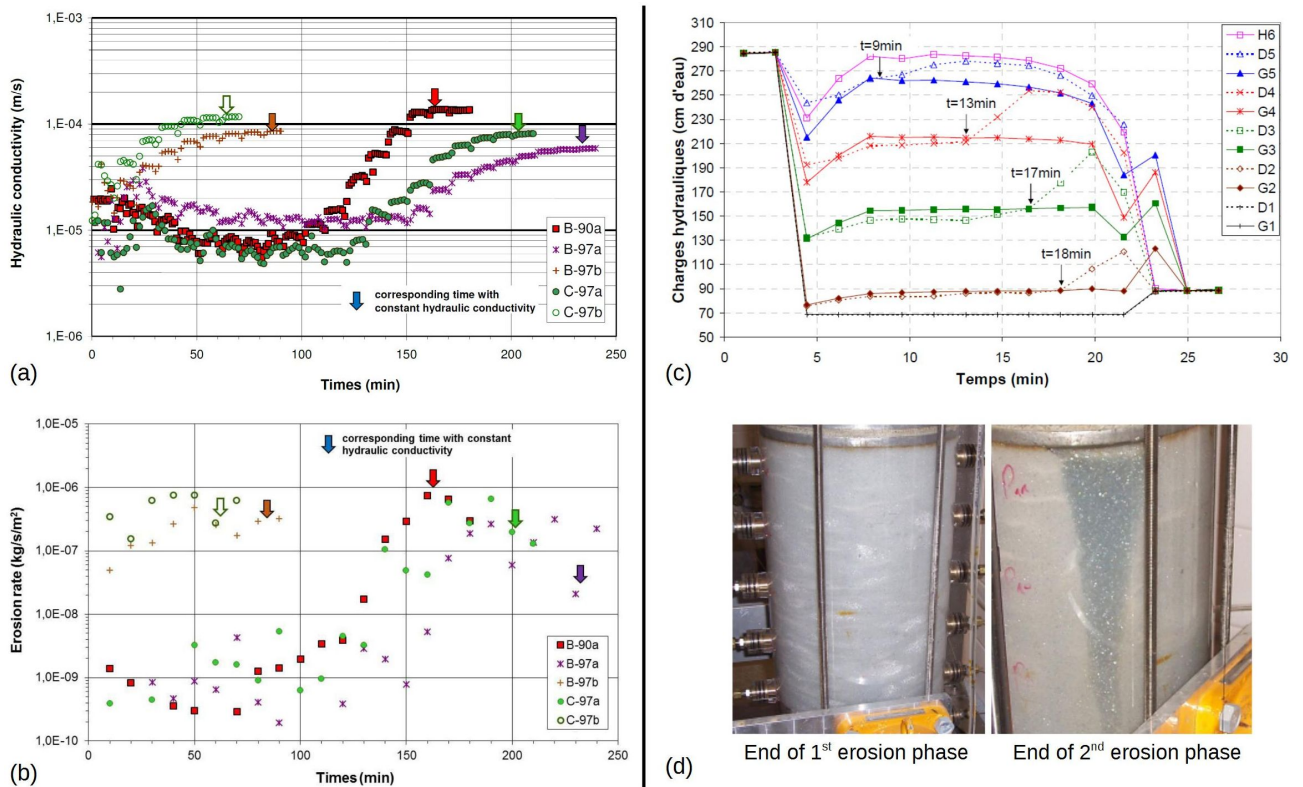
1. au cours d'une première étape la cinétique de développement de l'érosion est relativement faible, et la filtration (interne) des particules détachées et transportées semble prédominante sur le processus de détachement. En effet, une partie de la porosité (ou du moins des constriction) est peu à peu colmatée comme en témoigne, sur la figure 1.14a & b (voir typiquement les données représentées par des carrés rouges), la réduction de la perméabilité et du taux d'érosion sur une première partie de l'essai. Les analyses granulométriques et de densités locales (mésurées par gammadensimétrie) effectuées sur les essais de l'oedo-perméamètre montrent que cette première étape d'érosion se développe de manière relativement homogène dans les échantillons testés (Sail et al. 2011).
2. Vient ensuite une deuxième étape d'érosion caractérisée par une forte cinétique par rapport à la première étape, où les évolutions de la perméabilité et du taux d'érosion s'inversent, avec en particulier une augmentation du taux d'érosion de plusieurs décades (Fig. 1.14a & b). Cette deuxième phase d'érosion peut être très localisée (voir la figure 1.14d) et résulte d'une redistribution des pressions interstitielles suite aux colmatages partiels créés au cours de la première étape. Ces colmatages peuvent être également localisés comme en témoigne la hausse de la charge hydraulique en certains points de l'échantillon (figure 1.14c, prises de pression D1 à D5 situées à droite de la cellule), alors qu'en d'autres points les charges ne sont pas affectées (figure 1.14c, prises de pressions G1 à G5 situées à gauche de la cellule).

Bien qu'il n'y ait pas forcément de signe perceptible à l'oeil nu lors du développement de la première phase d'érosion, la figure 1.15 montre que son action sur la squelette granulaire du sol n'est pas négligeable, représentant, pour les essais que nous avons réalisés, près de 40 % de la masse totale érodée au cours de l'ensemble de l'essai. La figure 1.15 illustre également le soudain changement de la cinétique d'érosion au passage de la 1<sup>ère</sup> à la 2<sup>e</sup> phase d'érosion.

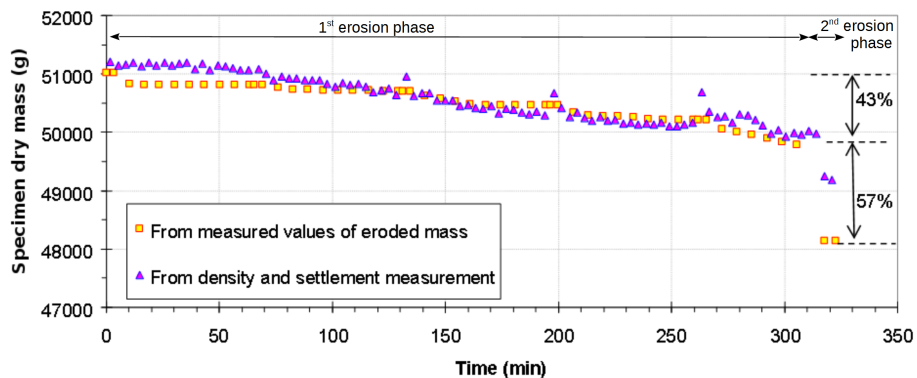
### 1.3.4 Une interprétation basée sur la puissance d'écoulement

Il a été fait le choix de décrire ici uniquement le développement de l'érosion de suffusion au cours de la première phase érosive. L'occurrence de la deuxième phase d'érosion demande à prendre en compte des évolutions non monotones des processus de détachement et de filtration (ou rattachement) des particules dont la description n'est pas aisée. Des éléments d'interprétation concernant cette deuxième phase sont discutés dans la partie ?? (p. ??) du chapitre 3 sur les perspectives.

Par ailleurs, on suppose que le détachement de particules solides dans le cas de l'érosion du suffusion peut être interprété de manière similaire à celui produit au cours de l'érosion de conduit. Un tel rapprochement a également été employé par Bonelli & Marot (2011) qui ont



**FIGURE 1.14** – A gauche, essais de suffusion sur du gravier sableux résultant en une variation non monotone de la perméabilité (a) et du taux d'érosion (b). A droite, essai de suffusion sur des billes de verre : (c) la hausse des charges hydrauliques sur le coté droit de la cellule (prises D5 à D1) et non identifiée sur le coté gauche (prises G5 à G1) témoignent de colmatages partiels et localisés suite au dépôt de particules transportées, (d) ces colmatages conduisent à une seconde phase d'érosion ici localisée et résultant au lavage complet des fines.



**FIGURE 1.15** – Réduction de la masse d'un échantillon de bille de verre au cours d'un essai de suffusion, déduite de la masse de particules érodées d'une part, et des mesures de densité et tassement d'autre part (cette dernière approche devient erronée suite à la localisation de l'érosion au cours de la seconde phase érosive).



considéré les pores du sol comme de petits tubes en périphérie desquels des particules fines du sol peuvent être détachées suivant un mécanisme similaire à celui observé au cours d'un essai d'érosion de trou. Ainsi, en suivant l'approche décrite dans la partie 1.2.3.2, le taux de détachement des particules au cours d'une érosion de suffusion pourrait s'exprimer en fonction de la puissance d'écoulement en suivant une loi puissance.

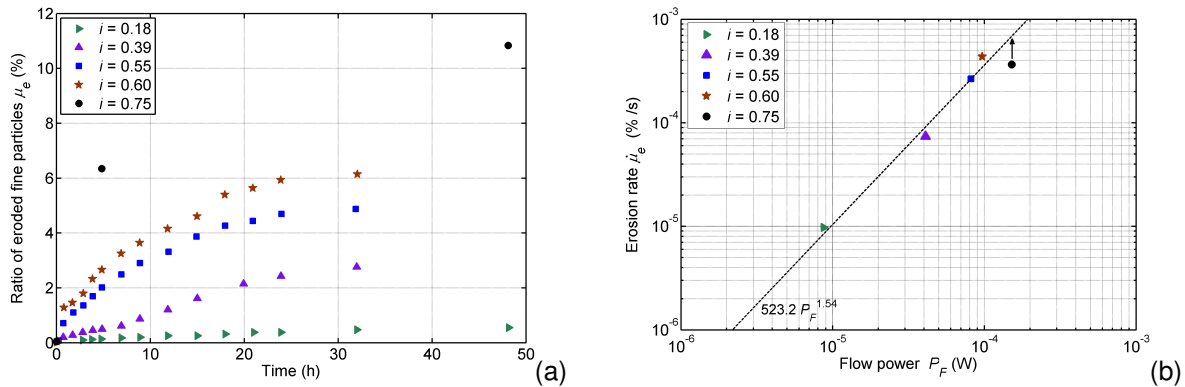
A titre d'exemple, on reporte sur la figure 1.16a les résultats, en terme de fraction massique érodée, d'essais de suffusion réalisés par Sterpi (2003) sur un sable limoneux. On considère alors que le taux d'érosion à l'initiation de chaque essai est représentatif de l'étape de détachement des particules, la décroissance ultérieure du taux d'érosion étant induite par le volume fini de fines détachables sous un chargement hydraulique donné ainsi que par l'occurrence possible de la filtration. Ce taux d'érosion à l'initiation des essais apparaît correctement décrit à partir de la puissance d'écoulement tel que représentés sur la figure 1.16b (pour le gradient hydraulique le plus élevé,  $i = 0.75$ , seule une limite inférieure du taux d'érosion est accessible étant donné le très faible nombre de points expérimentaux).

De manière similaire il est possible d'interpréter les essais de suffusion réalisés sur des mélanges de billes de verre avec l'oedo-perméamètre. Sur la figure 1.17a sont présentés les taux d'érosion par unité de volume,  $\dot{m}$ , selon la puissance d'écoulement par unité de volume,  $\bar{P}_F$ , pour six essais (N1 à N6 ; pour lesquels les séries en temps de la masse érodée sont données sur la figure 1.18). Les taux d'érosion les plus élevés représentés sur cette figure correspondent à l'initiation des différents paliers de chargement hydraulique, et sont supposés être représentatifs de l'étape de détachement. Ils sont approximés par une enveloppe limite supérieure (représentée avec une droite en tireté) exprimée, d'après l'équation 1.21, par :

$$\dot{m}^{\text{upper limit}} = \alpha_{\text{ref}} (\bar{P}_F)^{\beta_F} \quad (1.22)$$

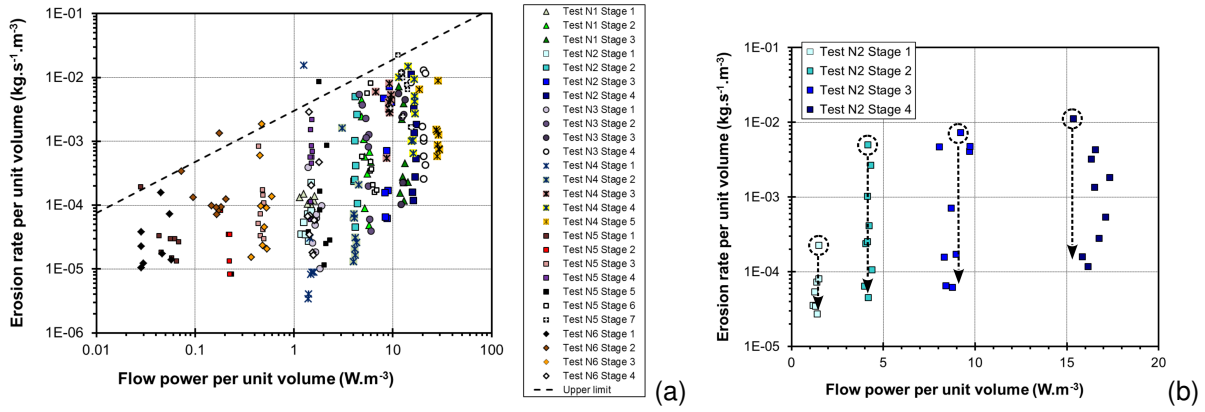
avec  $\alpha_{\text{ref}} = 0.003$  et  $\beta_F = 0.8$ , qui peuvent être vus comme des paramètres intrinsèques au matériau testé et représentatifs de son érodabilité. La puissance seuil d'écoulement  $P_F^*$  est très faible pour ce type de matériau et est négligée par soucis de simplicité.

La décroissance du taux d'érosion pour chaque palier de chargement hydraulique (comme illustré sur la figure 1.17b) montre qu'il est nécessaire de prendre en compte l'histoire du chargement hydraulique que nous représentons à travers l'énergie d'écoulement par unité de volume  $\Delta\bar{E}$ .  $\Delta\bar{E}$  correspond à l'intégration sur le temps, depuis l'initiation du palier de chargement hydraulique considéré, de la puissance d'écoulement instantanée  $\bar{P}_F$ . En prenant en compte ce paramètre d'histoire il est proposé l'expression suivante du taux massique d'érosion (Sibille



**FIGURE 1.16** – Essais de suffusion sur un sable limoneux naturel : (a) fraction massique érodée, d'après (Sterpi 2003) ; (b) taux d'érosion à l'initiation de chaque essai représenté en fonction de la puissance d'écoulement.





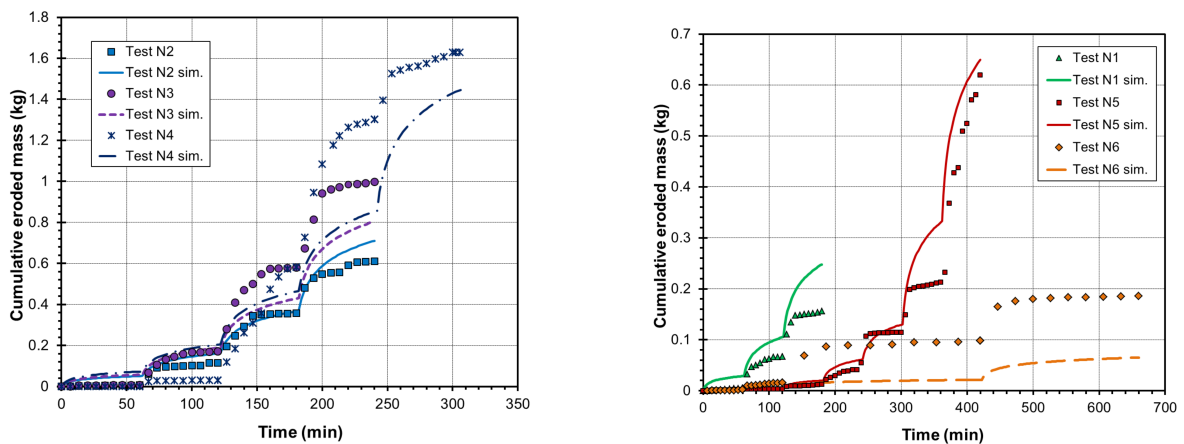
**FIGURE 1.17** – Essais de suffusion sur billes de verre : (a) identification du taux d'érosion maximum, à l'initiation des paliers de chargement hydraulique, comme une fonction puissance de la puissance d'écoulement ; (b) exemple sur l'essai N2 de la décroissance du taux d'érosion sous une puissance d'écoulement quasi constante (la perméabilité étant peu affectée) au cours de différents paliers de chargement hydraulique.

et al., 2015b) :

$$\dot{m} = \alpha_{\text{ref}} \frac{1}{\frac{\Delta \bar{E}}{\bar{P}_F t^*} + 1} (\bar{P}_F)^{\beta_F} \quad (1.23)$$

où  $t^*$  est un temps caractéristique relatif au matériau (ici  $t^* = 130$  s). Dans le cas des essais étudiés ici la conductivité hydraulique n'est que légèrement affectée par l'érosion et nous supposons qu'elle reste constante et égale à la conductivité initiale  $k_0$  qui a été mesurée sur les assemblages de billes avant les essais d'érosion (mais bien sûr une dépendance de la conductivité hydraulique à la teneur en fine pourrait être prise en compte).

Ainsi le taux d'érosion par unité de volume,  $\dot{m}$ , peut être calculé à tout instant et, intégré sur le temps, conduit à la masse érodée cumulée. Cette dernière est représentée sur la figure 1.18 et comparée aux mesures expérimentales. La description proposée permet de capturer les tendances principales du processus d'érosion par suffusion. Toutefois, il est clair que les prédictions ne sont pas totalement en accord avec les données expérimentales. Bien que les tests N2 et N3 sont censés être des essais de répétabilité, la masse cumulée des particules collectées est environ 25 % plus importante pour N2 que pour N3. Evidemment le modèle n'est pas



**FIGURE 1.18** – Masse érodée cumulée produite à partir d'essais de suffusion sur des mélanges de billes de verre : les symboles représentent les données expérimentales alors que les lignes continues représentent le modèle.

en mesure de décrire un telle différence de réponse puisque les paramètres d'entrée sont identiques (ou du moins quasi identiques avec une conductivité hydraulique initiale  $k_0 = 1.24 \cdot 10^{-4}$  m/s pour l'essai N2, alors que  $k_0 = 1.50 \cdot 10^{-4}$  m/s pour N3). Ainsi, étant donné les divergences relatives des résultats expérimentaux il est difficile de conclure sur la capacité prédictive du modèle.

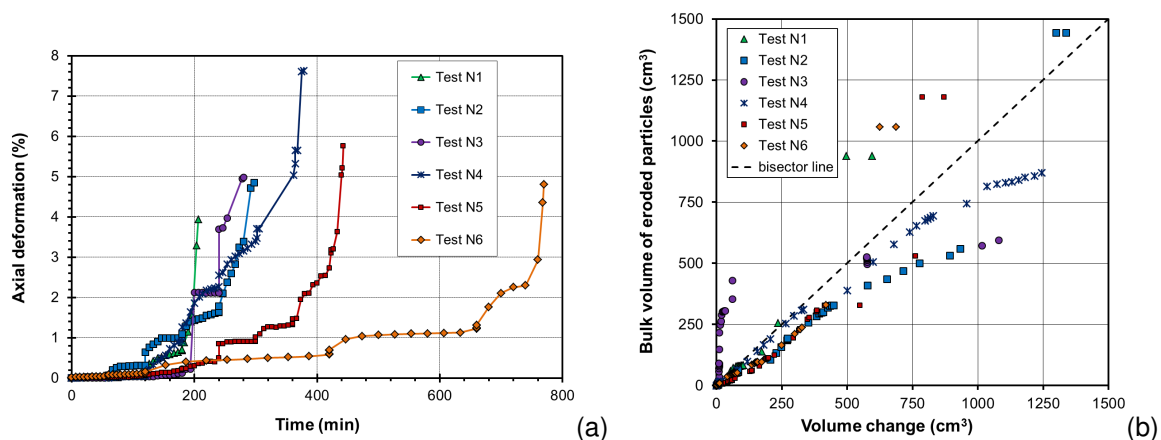
On retiendra néanmoins qu'il s'agit d'un modèle phénoménologique simple, nécessitant quatre paramètres ( $\alpha_{ref}, \beta_F, t^*, k_0$ ) qui sont identifiables à partir d'un unique essai de suffusion réalisé par accroissement par palier du gradient hydraulique global.

## 1.4 Réponses mécaniques induites par l'érosion de suffusion

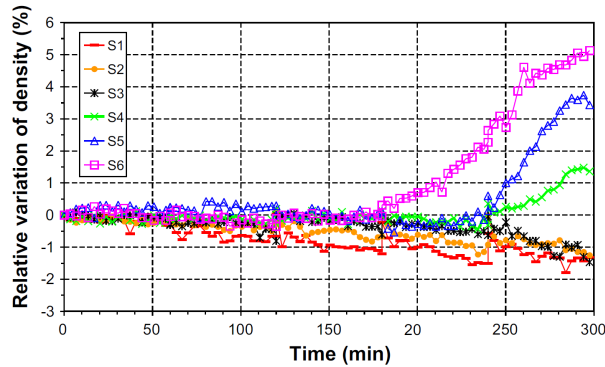
### 1.4.1 Première approche expérimentale à l'oedo-perméamètre

Les essais d'érosion à l'oedo-perméamètre permettent un premier accès de manière simple à la réponse mécanique d'un matériau granulaire érodé en suivant les tassements de l'échantillon soumis à une contrainte verticale. De tels tassements sont présentés sur la figure 1.19a pour des essais de suffusion sur des mélanges de bille de verre. Ces tassements évoluent ici en paliers en réponse au gradient hydraulique appliqué aux échantillons sous forme d'incrément successifs. En fin d'essais, lorsque la seconde phase d'érosion est atteinte (cf. section 1.3.3) la taux d'accroissement des tassements devient relativement élevé.

Etant en condition oedométrique, ces tassements témoignent d'une réduction de volume  $\Delta V$  de l'assemblage granulaire. Cette réduction de volume peut être comparée au volume apparent,  $V_{bulk}$  occupé initialement dans l'échantillon par les particules érodées en supposant que ces dernières présentaient en place une masse volumique apparente identique à la masse volumique sèche moyenne,  $\rho_d$ , de l'échantillon (soit :  $V_{bulk} = m_{eroded}/\rho_d$ ).  $\Delta V$  et  $V_{bulk}$  sont comparés sur la figure 1.19b. Si les tassements observés représentent directement la perte de volume occupée par les particules érodées les points devraient s'aligner suivant la bissectrice du plan de la figure 1.19b. Or les points se situent sous cette bissectrice (excepté pour l'essai N3 où le piston est resté bloqué, et en toute fin d'essai où les points repassent au-dessus de la bissectrice à cause de la localisation de l'érosion qui se traduit par un tassement seulement local non reflété par le déplacement du piston) indiquant que la réduction du volume de l'échantillon par le seul volume apparent des particules érodées n'est pas suffisant pour expliquer les tassements observés. En fait, l'extraction de la fraction fine du matériau laisse ici la liberté à la fraction grossière de se réorganiser de manière à atteindre un état plus dense que celui de



**FIGURE 1.19** – (a) Tassements et (b) comparaison entre le volume apparent occupé dans l'échantillon par les particules érodées et la variation du volume totale de l'échantillon, au cours d'essais de suffusion à l'oedo-perméamètre sur des mélanges de billes de verre.



**FIGURE 1.20** – Mesure de densité par rayonnement gamma au cours d'un essai de suffusion sur billes de verre pour différentes sections de l'échantillon (S6 étant la section la plus en amont par rapport à l'écoulement, et S1 la section la plus en aval).

l'état initial. Cela est confirmé par des mesures de densité au gammadensimètre dans différentes sections des échantillons comme celles présentées sur la figure 1.20. Une densification finale de la partie amont (sections S4 à S6) est visible alors qu'il n'y a pas de fines transportées par l'écoulement arrivant depuis l'amont. Cette densification est donc bien le résultat d'une compaction du matériau laissé en place. Au contraire, dans la partie avale la densité diminue de manière monotone : les vides laissés par les particules érodées ne sont pas totalement compensés par la recompaction du milieu (sans doute suite à un état de contrainte plus faible, et une liberté de réorganisation de la fraction grossière plus faible à cause de l'arrivée de fines détachées depuis l'amont).

Dans tous les cas, ces observations montrent que l'érosion de suffusion peut avoir des conséquences non-négligeables sur la micro-structure du matériau granulaire qui s'ouvre par extraction de particules solides et éventuellement se recompacte sous l'effet du chargement mécanique externe. On peut donc imaginer des conséquences assez variables sur les propriétés de résistance mécanique du matériau : un accroissement de la résistance comme une dégradation de celle-ci.

## 1.4.2 Modèle numérique discret de dégradation par érosion

Une description directe et complète des effets induits par l'érosion interne nécessite de mettre en oeuvre un modèle couplé hydro-mécanique afin de décrire les interactions complexes entre les phases solides et fluides ; ce qui représente un investissement lourd en moyens de calcul. Nous choisissons ici de nous focaliser sur le rôle potentiel des particules solides extraites par érosion sur la réponse mécanique macroscopique d'un assemblage granulaire. Pour cela nous avons suivi une approche simplifiée où seule la phase solide est représentée, et une cinétique d'extraction de grains est définie afin de mimer le processus d'érosion interne.

### 1.4.2.1 Modèle numérique et cinétique d'extraction

Un modèle numérique discret 3D classique est considéré avec une loi de contact frottante et non cohésive. La granulométrie initiale de l'assemblage de grain est présentée sur la figure 1.21a en trait continu et la réponse du modèle à une compression triaxiale drainée, représentée sur la figure 1.22 (courbes « virgin sample »), est typique d'un milieu dense et dilatant.

La définition de la cinétique d'extraction de particules solides sensée mimer l'érosion par suffusion de particules solides repose sur deux hypothèses (Scholtès et al. 2010) :

- premièrement les particules solides détachées par l'écoulement d'eau sont préférentiellement les particules les moins contraintes par leurs voisines,
- deuxièmement les particules détachées doivent être suffisamment petites pour pouvoir être transportée à travers l'espace interstitiel du milieu granulaire.

Ainsi les particules ayant la plus grande probabilité d'être érodées sont celle appartenant à la fraction fine du matériau et les moins chargées par les forces de contact induites par leur voisines.

Le « chargement » d'une particule  $p$  est estimé à partir du moment interne moyen  $m^p = \text{tr}(\mathbf{M}^p)$ , où  $\mathbf{M}^p$  est le tenseur moment interne de la particule  $p$  tel que défini par (Moreau 1997) et donnant une bonne représentation de l'état de contrainte à l'échelle de la particule :

$$M_{ij}^p = \sum_{\alpha \in p} r_i^\alpha f_j^\alpha \quad (1.24)$$

avec  $\vec{r}^\alpha$  le vecteur joignant le centre de la particule  $p$  au point du contact  $\alpha$  où est définie la force de contact  $\vec{f}^\alpha$ .

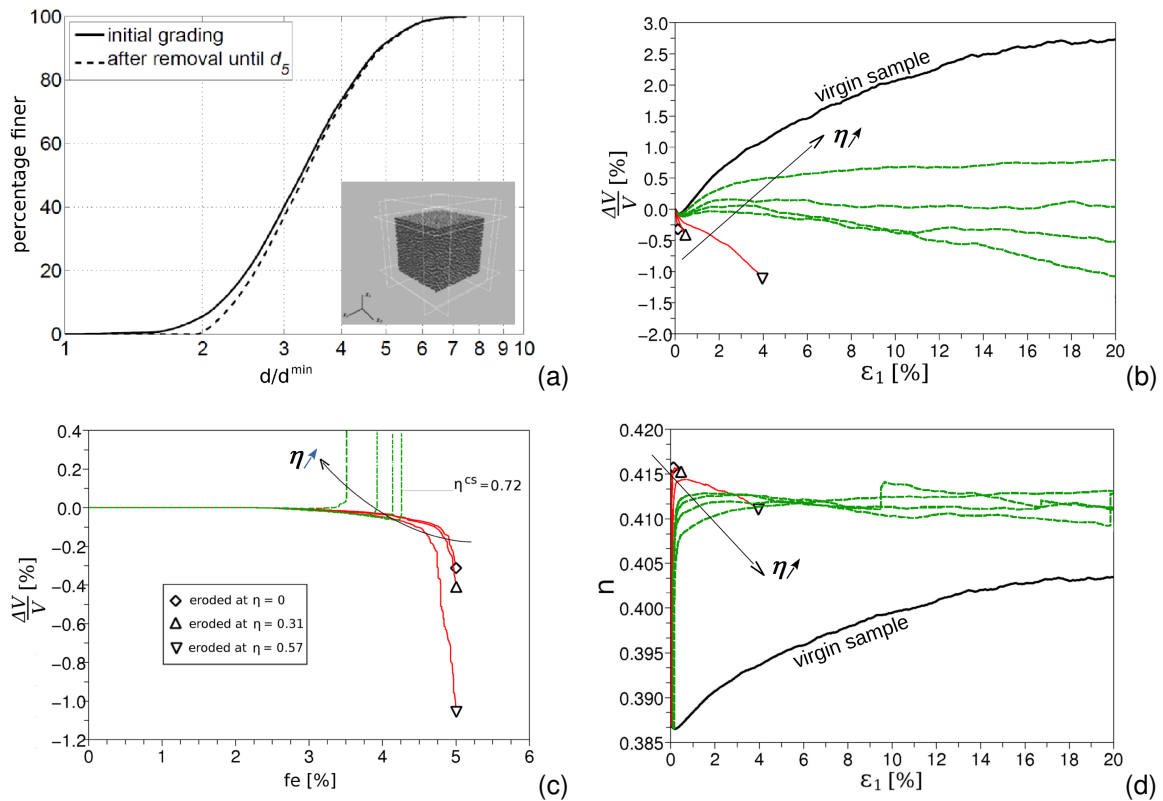
Les particules sont extraites une par une, en extrayant à chaque fois la particule présentant à l'état courant le plus petit moment interne moyen  $m^p$ , parmi les particules appartenant initialement à la fraction  $\leq d_5$  (taille de particule pour laquelle le passant est de 5 % en masse). Cette limite de 5 % est fixée ici de manière arbitraire, bien qu'il soit possible de la déduire de critères de filtre basés sur les tailles de particules ou les tailles de constriction. L'état de contrainte initial, atteint après une compression isotrope, caractérisé par  $\eta = q/p = 0$  (où  $q$  est le déviateur de contrainte et  $p$  la pression moyenne) ou au cours d'une compression triaxiale,  $\eta = q/p > 0$ , est maintenu pendant la phase d'extraction. Aussi une nouvelle particule est extraite uniquement si un nouvel état d'équilibre sous cet état de contrainte est atteint suite à l'extraction de la particule précédente.

Après l'extraction d'une particule, suivant l'implication de cette dernière dans le réseau des forces de contact, le système se réorganise en s'éloignant plus ou moins de l'état d'équilibre initial pour retrouver, ou pas, un nouvel état d'équilibre. Cela se traduit à l'échelle macroscopique par des déformations, éventuellement non bornées en cas d'occurrence de la rupture. Dans le cas où un état d'équilibre est retrouvé jusqu'à l'extraction complète de la fraction  $\leq d_5$ , la courbe granulométrique se retrouve modifiée telle que représentée sur la figure 1.21a.

#### 1.4.2.2 Réponse mécanique induite par l'extraction de particules

Les variations de volume induites par l'extraction des particules sont présentées sur la figure 1.21c en fonction de la fraction massique érodée  $f_e$  définie comme le rapport de la masse cumulée des particules extraites sur la masse initiale de l'échantillon. Quel que soit le rapport de contrainte  $\eta$ , on distingue une première phase au cours de l'extraction pour laquelle les changements de volume restent non significatifs. Au delà deux comportements distincts sont observables :

- pour des rapports de contrainte suffisamment faibles ( $\eta < 0,72$ ), le système présente un comportement contractant et un état d'équilibre est atteint après l'extraction complète de la fraction  $\leq d_5$ ,
- pour  $\eta \geq 0,72$ , il y a une transition d'une réponse contractante à une réponse dilatante associée à une perte de stabilité du système : la dilatance ce produit pour une masse extraite constante (Fig ; 1.21c) indiquant qu'aucun nouvel état d'équilibre est atteint. L'échantillon se déforme de manière indéfinie, comme on peut le constaté sur la



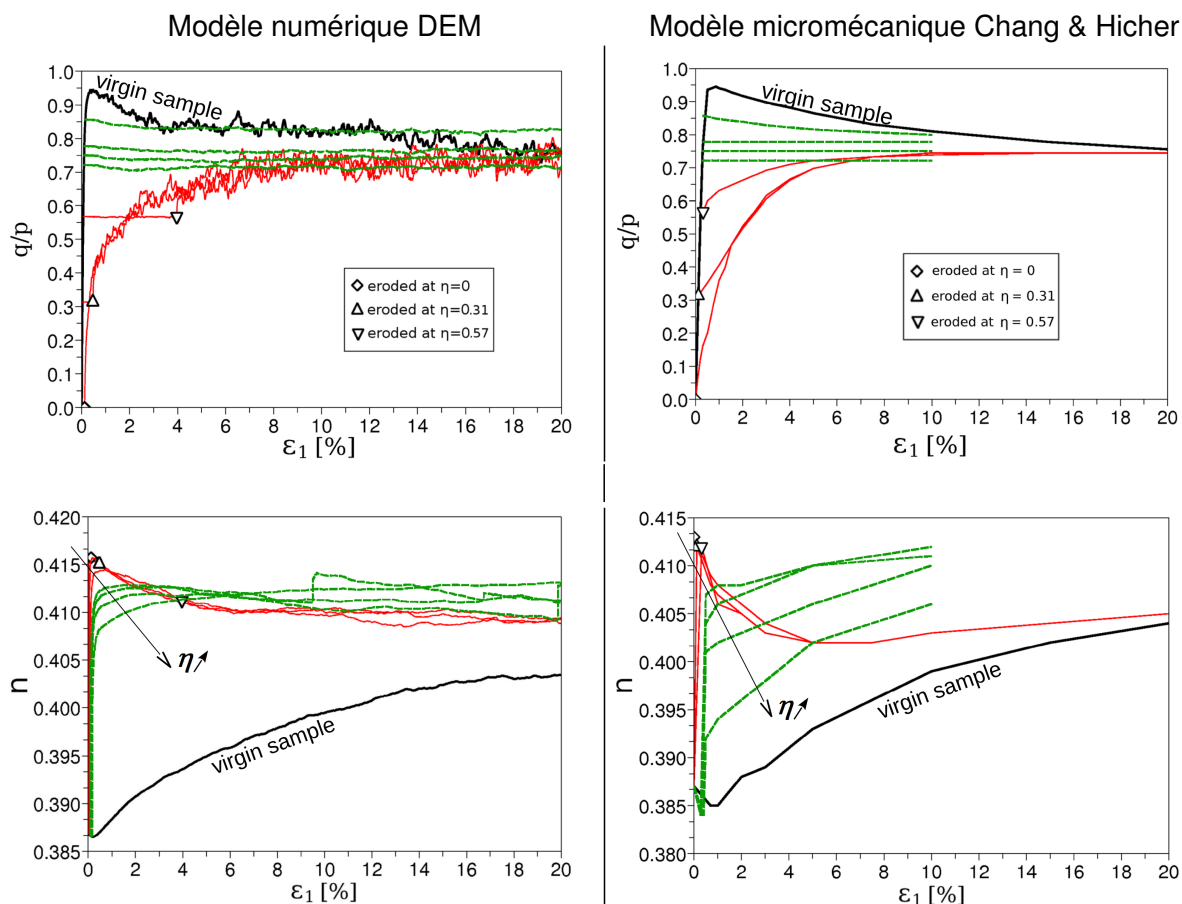
**FIGURE 1.21** – (a) Distribution de la taille des particules de l'échantillon numérique discret avant et après l'extraction de particules ; (b)-(d) variation de volume et de porosité ( $n$ ) induites par l'extraction de particules à partir de différents rapports de contrainte  $\eta = q/p$  : les lignes continues rouges indiquent qu'une configuration stable (repérée par un symbole vide) a été atteinte après l'extraction complète de 5 % (en masse) des grains ; au contraire, les lignes vertes en tirets correspondent à une extraction conduisant à la rupture de l'échantillon. Les courbes « virgin sample » représentent la réponse de l'échantillon, dans son état initial, à une compression triaxial drainée.

figure 1.21b où les mêmes résultats sont présentés en fonction de la déformation axiale  $\epsilon_1$ .

Il est remarquable que le seuil du rapport de contrainte pour lequel la rupture est provoquée par extraction des particules correspond à celui atteint à l'état critique ( $\eta \approx 0,72$ ) obtenu pour de large déformations déviatoires de l'échantillon vierge tel que représenté sur la figure 1.22.

Dans tous les cas, le processus d'extraction tend à accroître la porosité du milieu (voir la Fig. 1.21d) que la réponse induite soit dilatante, ou de manière plus surprenante, contractante. A cause du rôle marginal des particules extraites dans la stabilité globale du système, la micro-structure initiale supporte un accroissement de sa porosité avec une réorganisation limitée. Ce résultat confirme ceux obtenus en 2D par Muir-Wood et al. (2008) : la création d'une micro-structure plus ouverte due aux vides laissés par les particules extraites domine l'effet de compaction induit par les déstabilisations locales. Il semble ainsi possible pour ce type de granulométrie de traduire l'effet des changements micro-structuraux induit par l'érosion sur le comportement mécanique par l'intermédiaire d'une variation de porosité.

La pertinence d'une traduction de l'érosion via une variation de porosité peut également être évaluée en poursuivant la compression triaxiale sur les échantillons « érodés » et pour lesquels un état d'équilibre a été retrouvé après « érosion » (courbes continues rouges sur la figure 1.22). Comme pressenti, le comportement du matériau est passé d'un comportement typiquement dense et dilatant (avant extraction), à un comportement typiquement lâche et contractant (après extraction), reflétant effectivement l'accroissement de la porosité induit



**FIGURE 1.22** – Réponses mécaniques avant, au cours, et après extraction de la fraction fine simulée à partir d'un modèle numérique DEM et du modèle micro-mécanique de Chang & Hicher : les lignes noires épaisses représentent la réponse (rapport de contrainte  $q/p$  et porosité  $n$ ) de l'échantillon vierge à une compression triaxiale drainée ; les trois symboles (pour  $\eta = q/p = 0; 0,31; 0,57$ ) représentent les états stables atteints après le processus d'extraction, et les lignes continues rouges au delà de ces symboles correspondent à la réponse de l'échantillon « érodé » lorsque la compression triaxiale est poussive. Les lignes en tiretés verts représentent la réponse des modèles au cours du processus d'extraction dans le cas où celui-ci a conduit à la rupture de l'échantillon.

par la processus d'extraction.

L'angle de frottement interne a été réduit de  $24,2^\circ$  pour le matériau vierge à  $20,8^\circ$  pour le matériau « érodé » ce qui correspond également à l'angle de frottement à l'état critique.

On notera toutefois que la porosité à l'état critique (Fig. 1.22) est également affectée par le processus d'extraction. Cela ne peut pas être traduit à travers uniquement une modification de la porosité initiale et résulte de la modification de la granulométrie du matériau visible sur la figure 1.21a.

Toutes ces modifications induites sur les propriétés mécaniques sont, pour ce modèle, indépendantes de l'état de contrainte initial à partir duquel l'extraction des particules est réalisée. Cela signifie que la dégradation des propriétés mécaniques ne dépendrait pas de la résistance au cisaillement mobilisée ou de la pression moyenne à l'endroit où l'érosion se produit, mais dépendrait uniquement du degré d'avancement du processus d'érosion (qui lui peut dépendre de l'état de contrainte effective comme montré dans la littérature par exemple par : Moffat & Fannin 2006, Bendahmane et al. 2008, Chang & Zhang 2011).

### 1.4.3 Approche à partir d'une relation constitutive micromécanique

Ces travaux d'étude des dégradations induites des propriétés mécaniques ont été réalisés en collaboration avec Pierre-Yves Hicher qui a utilisé dans le même but le modèle analytique micromécanique de Chang & Hicher (2005). Il s'agit d'une relation constitutive obtenue par homogénéisation statistique.

Comme pour l'approche numérique discrète seule la phase solide est décrite et il est donc nécessaire d'introduire une cinétique d'extraction de la phase solide. Il n'est pas possible d'extraire ici les grains un à un, ces derniers n'étant pas explicitement décrits dans le modèle. Un paramètre de chargement représentatif de la fraction massique extraite  $f_e$  (ou érodée), a donc été défini. Il s'agit d'un accroissement de l'indice des vides  $\Delta e_{ex}$  correspondant au volume de la phase solide extraite. En supposant que les particules constitutives du sol sont toutes caractérisées par une masse volumique identique,  $\Delta e_{ex}$  s'exprime en fonction de  $f_e$  :

$$\Delta e_{ex} = \frac{f_e(1 + e_0)}{1 - f_e} \quad (1.25)$$

avec  $e_0$  l'indice des vides initial du sol.

Par ailleurs le modèle micromécanique considère une loi de contact entre grains dont l'angle de frottement  $\phi_p$  est fonction de l'indice des vides courant  $e$  afin de traduire de manière indirecte une liberté du déplacement relatif entre particules en contact fonction de l'espace disponible pour le développement de ce déplacement :

$$\tan \phi_p = \left( \frac{e_c}{e} \right)^m \tan \phi_\mu \quad (1.26)$$

où  $e_c$ ,  $m$  et  $\phi_\mu$  sont des paramètres du modèle. L'équation 1.26 peut être vue comme la prise en compte d'une échelle mésoscopique, représentant le fait que le déplacement relatif entre deux particules peut être limité non seulement par les propriétés du contact mais aussi par des blocages géométriques induits par les particules voisines.

Ainsi, un accroissement de la fraction extraite conduit à un accroissement de l'indice des vides résultant en une réduction de la résistance au glissement des contacts. Sous l'effet du chargement mécanique externe maintenu constant certains de ces contacts peuvent se mettre à glisser et induire des déformations à l'échelle macroscopique. Ces déformations macroscopiques induisent une déformation volumique  $\varepsilon_v$  et donc une variation de l'indice des vides qui s'ajoute à celle engendrée par l'extraction de particules :  $\Delta e = \Delta e_{ex} + \varepsilon_v(1 + e)$ , et qui à son tour affecte la résistance au glissement des contacts.

Le modèle micromécanique a été calibré sur le modèle numérique discret et l'érosion a été simulée pour les mêmes rapports de contrainte  $\eta$ . La réponse du modèle micromécanique est comparée sur la figure 1.22 à celle du modèle DEM. Les deux modèles sont en très bon accord alors que la cinétique d'érosion est introduite de manière différente pour chacun d'eux. La principale différence se situe au niveau de l'indice des vides à l'état critique qui, dans le cas du modèle micromécanique, n'est pas affecté par le processus d'extraction. En effet, les tailles de particules ne sont pas prise en compte par le modèle micromécanique (qui ne considère qu'une distribution d'orientations de contacts) et il n'est alors pas possible de rendre compte l'influence de la variation de la granulométrie sur l'état critique.

Pour conclure, rappelons que les réponses des modèles DEM et micromécaniques ont été simulées avant que des données expérimentales provenant d'essais triaxiaux de laboratoires sur des sols érodés aient été publiés. Depuis, il y a eu par exemple les essais réalisés par Chang & Zhang (2011) sur des mélanges de gravier et de sable érodés par suffusion sous

différents rapports de contraintes. Retenons qu'il y a un très bon accord qualitatif (les propriétés mécanique du modèle DEM n'ayant pas fait l'objet d'une calibration particulière) entre ces derniers résultats expérimentaux et les réponses que nous avons pu simulées.

## 1.5 Conclusion

Les modélisations numériques ainsi que l'analyse d'essais de laboratoire suggèrent que le détachement de particules solides au cours de l'érosion interne d'un milieu granulaire peut être décrit par la puissance d'écoulement du fluide (en tous cas pour les régimes d'écoulements qui ont été considérés, proches d'un régime laminaire). Cette interprétation présente une alternative à celle plus classique considérant la contrainte visqueuse de cisaillement du fluide à l'interface avec le solide, avec l'avantage d'une application plus directe : afin de déterminer la contrainte de cisaillement il est nécessaire de faire des hypothèses vis-à-vis de l'espace interstitiel du milieu. La puissance d'écoulement du fluide est bien sûr dépendante de la configuration de cet espace interstitiel, mais cet aspect est pris en compte implicitement via le débit mesuré si l'essai est contrôlé en charge hydraulique (ou inversement si c'est le débit qui est contrôlé).

Dès lors qu'un phénomène d'auto-filtration intervient dans le déroulement de l'érosion interne, l'interprétation se complique et ne peut plus prendre en compte uniquement la contrainte de cisaillement hydraulique ou la puissance d'écoulement. Une proposition a été faite dans ce sens pour décrire la suffusion mais elle reste très primaire.

Enfin, une investigation a été menée, suivant une approche uniquement en modélisation mais utilisant deux modèles de conception différente, sur l'impact possible d'un phénomène suffusif sur la résistance au cisaillement d'un sol. Les conclusions de cette investigation restent limitées du fait, entre autres, de la granulométrie considérée (très étroite). Toutefois, aujourd'hui des résultats d'essais de laboratoire sont disponibles sur cette question et permettent d'alimenter les modèles et donc d'aller plus loin.

L'ensemble des discussions sur cette thématique de l'érosion interne sont poursuivies dans la dernière partie du mémoire consacrée aux perspectives.



## Chapitre 2

# Une interprétation de la rupture dans les sols sur la base d'expériences numériques discrètes

Ces travaux sur la description de la rupture ont conduit à proposer une définition des états limites plus générale que celle propre aux états limites en contraintes, avec la particularité ici d'être systématiquement appuyée sur des résultats numériques issus de la méthode des éléments discrets (DEM).

Dans ce chapitre on rappelle tout d'abord la définition classique des états limites en contraintes avant de généraliser cette notion à des états limites définis dans un espace mixte c'est-à-dire faisant intervenir à la fois des variables de contraintes et des variables de déformation. Ces états limites sont alors qualifiés de « généralisés ». Dans ce cadre là il s'avère également utile de rappeler :

- les notions de chemin de chargement, paramètre de chargement, et paramètre de contrôle qui permettent de conduire un matériau à de tels états limites généralisés, et qui conditionnent l'occurrence de la rupture dite « effective » à partir de ces états limites ;
- le moyen de détecter les états limites en contrainte ou généralisés sur la base du critère du travail du second ordre.

Dans une deuxième partie de ce chapitre on s'intéresse au développement de la rupture effective, conduisant le matériau d'un régime de déformation quasi-statique à un régime dynamique, ainsi qu'au mode de rupture localisé ou diffus. En particulier on s'interrogera sur le dépendance du mode de rupture vis-à-vis du paramètre de contrôle du chargement d'une part, et du chemin de chargement d'autre part.

L'ensemble de ces travaux fait suite à mes activités de thèse (sans que ces dernières soient reprises dans ce mémoire). Ils ont été réalisés en collaboration avec Félix Darve du laboratoire 3SR, François Nicot de l'IRSTEA, ainsi qu'en grande partie avec Nejib Hadda alors en thèse à l'IRSTEA (2009-2013). De plus, la caractérisation à la petite échelle d'échantillons numériques présentant une rupture diffuse (fin de la section 2.2.2) est le fruit des travaux d'Antoinette Tordesillas et Sebastian Pucilowski de l'Université de Melbourne.

Une synthèse, non exhaustive, de ces travaux a été publiée sous la forme d'un article (Sibille et al. 2015c).

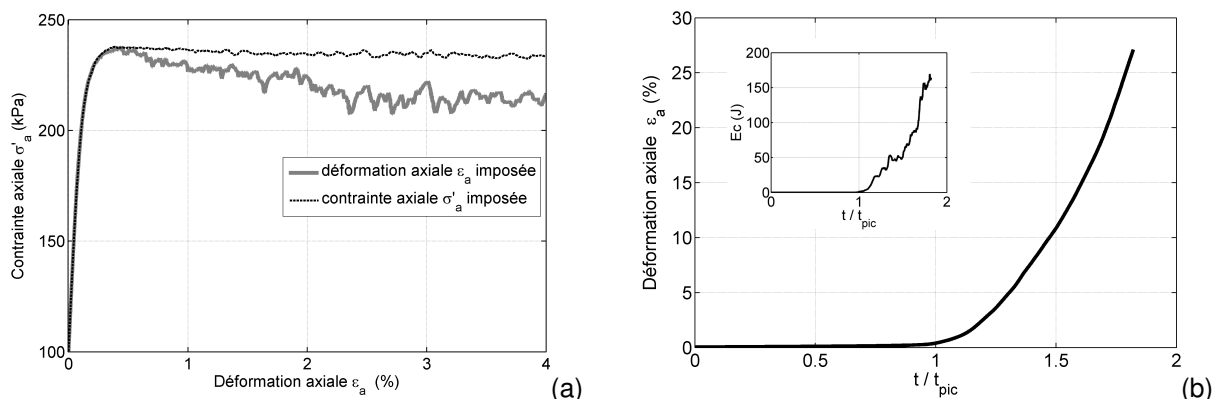
## 2.1 Généralisation de la notion d'état limite

### 2.1.1 Etats limites en contrainte

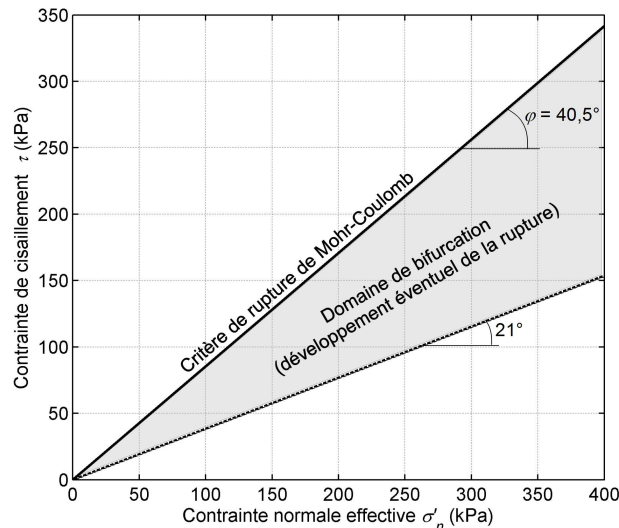
Lors d'essais de chargement mécanique sur des sols, on observe que certains états de contrainte ne peuvent pas être dépassés. Cela est constaté par exemple lors d'essais de compression triaxiale consolidés et drainés. La réponse typique à un tel essai en terme de contrainte axiale est représentée avec la courbe grise épaisse sur la figure 2.1 a. La contrainte axiale atteint une valeur limite (maximum) qui ne peut pas être dépassée. Cette valeur limite de contrainte axiale est associée à une contrainte de cisaillement  $\tau$  maximum que l'on peut représenter dans le plan de Mohr en fonction de la contrainte normale  $\sigma_n$  appliquée sur le plan de cisaillement. Pour différentes valeurs de contrainte de confinement (de contrainte radiale) on obtiendra différentes valeurs de contrainte axiale limite, chacune associée à un état de contrainte  $(\tau, \sigma_n)$  dans le plan de Mohr. Ces états limites en contrainte se regroupent suivant une courbe dite intrinsèque qui est assez bien représentée par une droite appelée le critère de rupture de Mohr-Coulomb (voir la figure 2.2). Les états de contrainte situés au-delà du critère de Mohr-Coulomb sont inaccessibles car le sol entre en rupture lorsque son état de contrainte rencontre ce dernier ; ou autrement dit, lorsque son état de contrainte atteint un état limite en contrainte. On parle d'états limites en contrainte, car la rupture se développe effectivement pour ces états seulement si le chargement appliqué au sol est défini uniquement à partir de variables de contrainte. De manière plus formelle, dans le cadre de l'élasto-plasticité classique des matériaux non visqueux, la condition limite de plasticité  $\det \mathbf{M} = 0$  (Darve 1990) est vérifiée en chacun de ces états limites en contrainte (où  $\mathbf{M}$  est le tenseur définissant la relation constitutive incrémentale  $d\sigma = \mathbf{M} d\varepsilon$  entre les tenseurs de contrainte et de déformation incrémentaux).

Pour illustrer cela, considérons le cas d'un essai triaxial drainé sur un sol entièrement piloté en contraintes. La contrainte radiale  $\sigma_r$  est imposée par la pression d'eau cellulaire comme cela est fait classiquement, mais au lieu d'imposer un taux de déformation axiale à l'échantillon, l'opérateur impose un accroissement régulier de la contrainte axiale  $\sigma_a$ . Ce contrôle de la contrainte axiale peut être mis en oeuvre en plaçant par exemple des masses en tête du piston de la cellule triaxiale. Tant que la contrainte axiale est inférieure à la valeur limite, la réponse de l'échantillon est identique que l'opérateur contrôle la contrainte, ou la déformation axiale (courbes noire et grise de la figure 2.1a). Lorsque l'état limite en contrainte est atteint (constituant un point du critère de Mohr-Coulomb), si l'opérateur ajoute une nouvelle petite masse sur le piston pour tenter de faire croître la valeur de  $\sigma_a$ , la rupture se développe subitement.

Cette rupture est marquée d'une part par le développement de déformations très impor-



**FIGURE 2.1** – Réponse simulée par DEM d'un échantillon de sol à une compression triaxiale drainée contrôlée en déformation (a) ou en contrainte (a & b) ;  $t_{pic}$  correspond à l'instant où la valeur de  $\sigma_a$  limite est atteinte.



**FIGURE 2.2** – Domaine de bifurcation dans le plan de Mohr pour un sable d'Hostun dense (Sibille et al. 2013, d'après Darve et al. 2004).

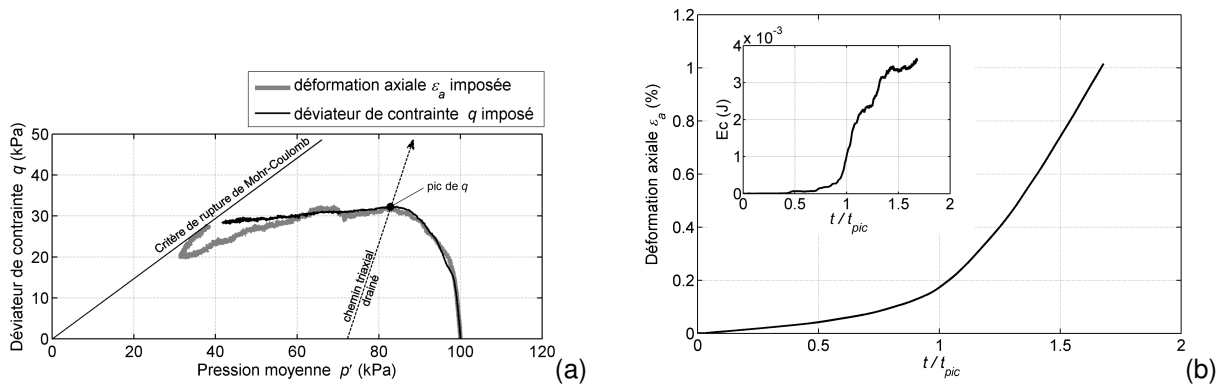
tantes, ces déformations sont non bornées et peuvent se traduire par l'effondrement complet de l'échantillon, conformément à la condition limite de plasticité  $\det \mathbf{M} = 0$ . Cette condition traduit le fait que des déformations finies peuvent se développer sous un état de contrainte constant ( $d\sigma = 0$  quelque soit  $d\varepsilon$ ), comme on peut le voir sur la figure 2.1a, la contrainte axiale reste constante durant l'écoulement du matériau.

D'autre part, ces déformations se développent de manière soudaine, en un temps très court comme représenté sur la figure 2.1b. Le taux de déformation est alors lui-même très élevé et traduit le fait, qu'à l'initiation de la rupture, l'échantillon est passé d'une réponse quasi-statique à une réponse dynamique marquée (Nicot et al. 2012) par une forte croissance d'énergie cinétique (Fig. 2.1b).

Lors de cet essai, l'opérateur contrôlait l'évolution de l'état mécanique de l'échantillon par le biais de la contrainte axiale  $\sigma_a$ , cette dernière est appelée « **paramètre de contrôle** ». Or, lors de la rupture, la maîtrise de l'état de déformation de l'échantillon via ce paramètre de contrôle est perdue : on parle alors de perte de contrôlabilité (Nova 1994). Puisque à la rupture on a un changement soudain de la réponse du sol d'une réponse quasi-statique à une réponse dynamique pour une variation graduelle et constante du paramètre de contrôle, on parle aussi de bifurcation de la réponse de l'échantillon (Darve et al. 2004). De manière générale, en ingénierie, la stabilité d'un ouvrage est étudiée vis-à-vis de cette définition classique de la rupture que ce soit par le biais d'une analyse limite, ou sur la base d'un modèle élasto-plastique (on parle alors de rupture plastique).

## 2.1.2 Etats limites généralisés

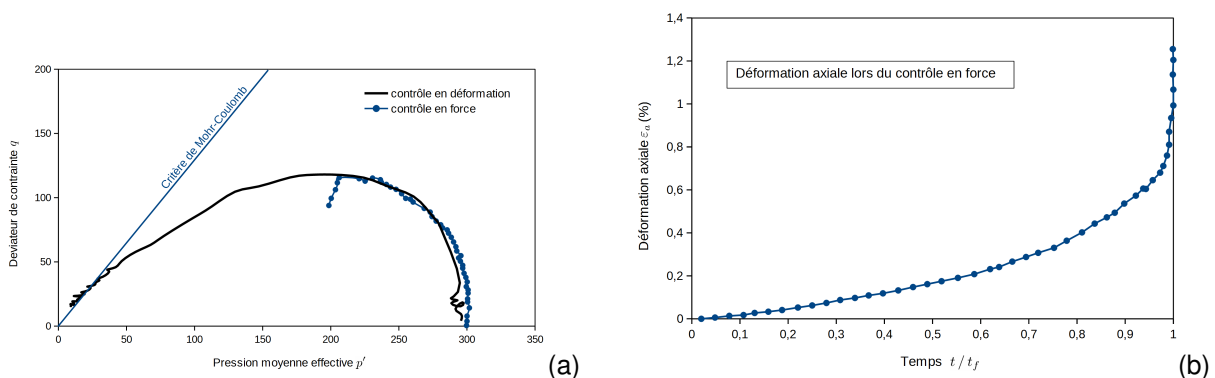
La description de la rupture décrite ci-dessus est une définition particulière qui ne permet pas de décrire et d'anticiper l'ensemble des modes de rupture pouvant survenir dans les sols. Le cas de la compression triaxiale d'un sol lâche en condition non drainée constitue un bon contre-exemple. Lorsque cet essai est réalisé de manière classique, on impose à l'échantillon de se déformer à volume constant en fermant la vanne de drainage de l'eau interstitielle. Par conséquent, la déformation volumique  $\varepsilon_V$  est pour cet essai un paramètre de chargement imposé à l'échantillon ( $\varepsilon_V = \text{cste}$ ). De plus, le contrôle de l'état de l'échantillon est réalisé en fixant un taux de déformation axiale. Si le sol est suffisamment lâche, le déviateur de contrainte  $q$  passe par un maximum puis décroît (courbe grise et épaisse de la figure 2.3a).



**FIGURE 2.3** – Réponse simulée par DEM d'un sol lâche à une compression non drainée contrôlée via  $\varepsilon_a$  (a) ou via  $q$  (a & b);  $t_{pic}$  correspond à l'instant où la valeur de  $q$  limite est atteinte.

L'expérience peut être renouvelée en imposant toujours une déformation volumique nulle mais en changeant le paramètre de contrôle. L'opérateur peut aussi choisir de contrôler le déviateur de contrainte  $q$  (en ajoutant régulièrement des masses sur le piston de la cellule triaxiale) au lieu de contrôler la déformation axiale. Tant que le pic du déviateur de contrainte n'est pas atteint le comportement de l'échantillon de sol est identique, que le contrôle soit réalisé via la déformation axiale ou via le déviateur de contrainte (courbes grise et noire de la figure 2.3a). Une fois le pic de  $q$  atteint, si une petite masse additionnelle est placée sur le piston, on observe un effondrement brutal de l'échantillon, caractérisé comme précédemment par des déformations non bornées et par le passage d'une réponse quasi-statique à une réponse dynamique (Fig. 2.3b); le sol ne pouvant pas supporter un nouvel accroissement de  $q$  tout en conservant une variation de volume nulle. Cela va à l'encontre de son comportement mécanique intrinsèque.

En comparant les figures 2.1b et 2.3b on se rend compte que la réponse post-rupture de l'assemblage granulaire sont qualitativement identiques : accroissement soudain du taux de déformation à partir de l'initiation de la rupture, se traduisant logiquement par une bouffée d'énergie cinétique, et une perte de contrôle de l'état de déformation de l'échantillon. Ces résultats numériques sont aussi en accord avec ceux obtenus expérimentalement sur un sable lâche soumis à une compression non-drainée (i.e. isochore) et présentés sur la figure 2.4.



**FIGURE 2.4** – (a) Courbe triaxiale non-drainée sur un échantillon de sable lâche où la paramètre de contrôle est alternativement la déformation axiale  $\varepsilon_a$  (contrôle en déformation) et le déviateur de contrainte  $q$  (contrôle en force). Les variations de la déformation axiale sont représentées en (b) pour le chemin de chargement contrôlé en force (où  $t/t_f$  est le temps normalisé par rapport au temps en fin d'essai); d'après Daouadji et al. (2011).

Ainsi, on observe dans les conditions décrites ci-dessus un cas de rupture typique, bien que l'état de contrainte à partir duquel elle s'initie (pic du déviateur de contrainte) est inclus à l'intérieur du critère de rupture de Mohr-Coulomb. Ou autrement dit cet état de contrainte ne constitue pas un état limite en contrainte. Comment expliquer alors l'occurrence de la rupture ?

Le pic du déviateur de contrainte constitue un état limite pour ce sol uniquement si la condition de volume constant est imposée conjointement à un accroissement de  $q$  ( $dq > 0$ ). Etant donné que le programme de chargement conduisant à l'occurrence de la rupture est défini de manière mixte, c'est-à-dire portant à la fois sur un paramètre de déformation ( $\varepsilon_V = \text{cste}$ ) et un paramètre de contrainte ( $dq > 0$ ), cet état mécanique est qualifié d'état limite généralisé. Si par exemple, le programme de chargement avait été entièrement défini en contraintes (cas de l'essai triaxial drainé contrôlé avec la contrainte axiale, figure 2.3a), des états de contrainte situés entre le pic de  $q$  (en non-drainé) et le critère de Mohr-Coulomb auraient pu être atteint sans occurrence de la rupture.

### 2.1.2.1 Chemin de chargement, paramètres de chargement, et paramètre de contrôle

Dans la partie 2.1.1 nous avons considéré l'occurrence effective de la rupture lorsque le chargement de l'assemblage granulaire est entièrement défini à partir de variables de contrainte. Toutefois, des conditions de chargement plus générales peuvent être considérées en remplaçant le tenseur de contrainte  $\sigma$  par un tenseur de chargement  $l$ . Il est important, dans ce cadre plus général, de préciser les notions de **chemin de chargement**, de **paramètre de chargement**, et de **paramètre de contrôle** (Sibille et al. 2015c).

Soit  $n$  (avec  $2 \leq n \leq 6$ ) la dimension de l'espace de chargement (par exemple,  $n = 2$  dans les conditions axisymétriques classique en cellule triaxiale, sans rotation des directions principales en contrainte et en déformation). Le chargement est alors défini par un groupe de  $n$  composantes  $l_i$  du tenseur de chargement. Ces composantes sont des combinaisons linéaires des variables de déformation (par exemple, si le volume de l'échantillon est contrôlé alors  $\varepsilon_v = \text{tr}(\varepsilon)$  constitue une des composantes  $l_i$ ), ou bien des variables de contrainte (comme par exemple  $q = \sigma_1 - \sigma_3$ ). Ces composantes  $l_i$  sont associées respectivement à  $n$  paramètres de réponse  $r_i$  (Nova 1994, Runesson & Mroz 1989, Klisinski, Z., & Runesson 1992) qui doivent vérifier l'équation de conjugaison de l'énergie, soit :

$$\sum_{i=1}^n l_i r_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i \varepsilon_i, \quad (2.1)$$

Les paramètres de réponse sont également des combinaisons linéaires des composantes du tenseur de contrainte, ou bien des composantes du tenseur de déformation.

A partir d'un état mécanique donné, la **direction du chemin de chargement** est définie à la fois par  $n - 1$  relations du type :

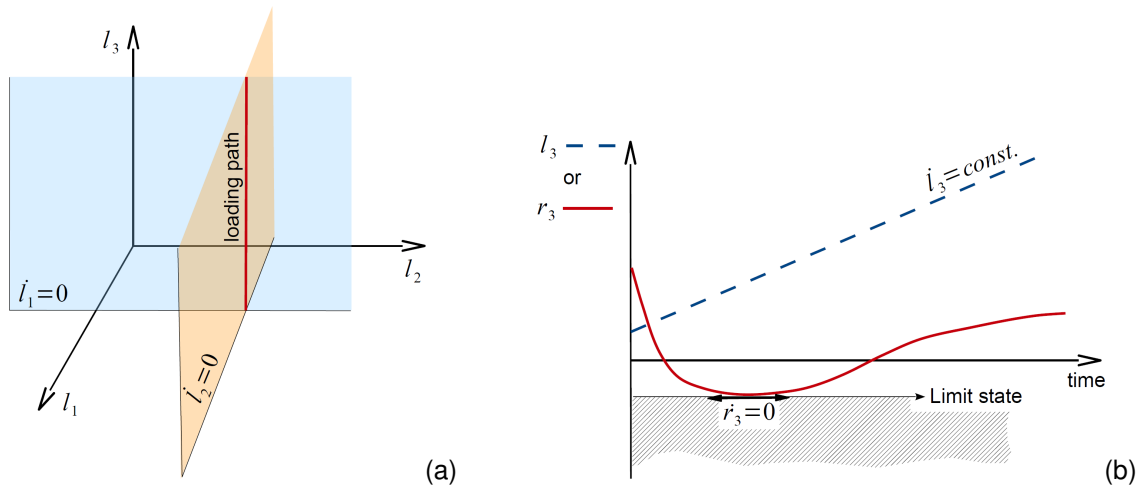
$$\dot{l}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n - 1), \quad (2.2)$$

et par la relation :

$$\dot{l}_n = \text{cste} \quad (\text{voire plus généralement par } \dot{l}_n = f(t)). \quad (2.3)$$

Un exemple est donné en dimension 3 sur la figure 2.5a.

Etant donné que le paramètre  $l_n$  est celui qui va conduire le matériau à évoluer au cours du temps, il est appelé le **paramètre de contrôle**. Les  $n - 1$  autres paramètres  $l_i$  sont les **paramètres de chargement**.



**FIGURE 2.5** – (a) représentation schématique d'un chemin de chargement dans un espace de chargement tridimensionnel ( $n = 3$ ), la direction de chargement est définie par deux conditions,  $\dot{l}_1 = 0$  et  $\dot{l}_2 = 0$ , imposée sur les paramètres de chargement ; (b) un taux d'accroissement constant est imposé au paramètre de contrôle,  $\dot{l}_3 = \text{const.}$ , entraînant l'état mécanique à évoluer le long du chemin de chargement. Un état limite généralisé est atteint si le paramètre de réponse  $r_3$  conjugué (par rapport à l'énergie) avec le paramètre de contrôle  $l_3$  passe par un extremum.

Un **état limite** est atteint lorsque le paramètre de réponse  $r_n$ , conjugué avec la paramètre de contrôle  $l_n$ , atteint un extremum (minimum ou maximum local). L'état limite est défini, d'une part, par les  $n - 1$  valeurs des paramètres  $l_i$  à cet extremum, et d'autre part par la valeur de  $r_n$  à l'extremum également (figure 2.5b). Lorsque les  $n - 1$  paramètres de chargement  $l_i$  et le paramètre de réponse  $r_n$  incluent à la fois des composantes en contrainte et en déformation (et pas seulement des composantes en contrainte comme à l'état limite plastique), cet état limite est appelé un **état limite généralisé**.

On parle d'état limite (généralisé) parce que les valeurs du paramètre de réponse  $r_n$  au-delà de cet état ne sont pas accessibles pour le matériau suivant la direction de chargement précédemment définie. Le moyen direct de vérifier un tel état limite est d'inverser les rôles du paramètre de réponse  $r_n$  et du paramètre de contrôle  $l_n$  qui lui est conjugué. Aussi le paramètre de contrôle est maintenant la paramètre qui passait précédemment par un extremum à l'état limite. Pour ce nouveau programme de chargement la relation constitutive incrémentale entre  $l$  et  $r$  s'écrit  $dl = \mathbf{N}dr$ , et on a  $\det \mathbf{N} = 0$  à l'état limite généralisé (Darve et al. 2004, Nova 1994). L'annulation du déterminant de  $\mathbf{N}$  signifie que des changements indéfinis des paramètres de réponse  $r_i$  peuvent se développer pour des valeurs constantes des paramètres de chargement  $l_i$  qui sont effectivement tous stationnaires à l'état limite ( $dl = 0$  quelque soit  $dr$ ). C'est ce que l'on a vu dans la partie précédente au sujet de l'essai non drainé sur un matériau lâche.

Il est important de remarquer que l'état limite en contrainte rappelé brièvement dans la partie 2.1.1 est un cas particulier de l'état limite généralisé pour lequel le tenseur de chargement à partir duquel est défini le chemin de chargement est identique au tenseur de contrainte ( $l \equiv \sigma$ ). Ainsi pour une compression triaxiale (drainée) axisymétrique ( $\sigma_2 = \sigma_3$  et  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ) l'espace de chargement est bidimensionnel et le chemin de chargement est défini par :

- le paramètre de chargement  $\dot{l}_1 = \dot{\sigma}_2 = 0$ ,
- et le paramètre de contrôle  $\dot{l}_2 = \dot{\varepsilon}_1 = \text{cste} > 0$ .

L'état limite est atteint lorsque la paramètre de réponse  $r_2 = \sigma_1$  (conjugué avec  $l_2$ ) atteint un pic ou un plateau. La rupture est effectivement déclenchée à cet état limite si le paramètre de

contrôle et le paramètre de réponse sont inversé (soit :  $\dot{l}_2 = \dot{\sigma}_1 = \text{cste} > 0$ ), ou, en d'autres termes, si le chemin de chargement est totalement défini à partir de composantes en contrainte.

### 2.1.2.2 Identification des états limites

Les états limites (qu'ils soient des états limites en contrainte ou des états limites généralisés) peuvent être détectés sur la base du travail du second ordre, qui permet une caractérisation des états mécaniques d'une manière sans doute plus systématique que la recherche d'extremums possibles de paramètres de contrôle. Le critère du travail du second ordre a été introduit par Hill (1958). Sa définition a été discutée par de nombreux auteurs (par exemple : Bigoni & Hueckel 1991, Raniecki & Bruhns 1981, Valanis 1985, Chambon & Caillerie 1999, di Prisco & Nova 1994, Osinov & Wu 2005, Darve et al. 2007, Nicot et al. 2007) et son application au cas des géomatériaux fait l'objet aujourd'hui d'une littérature importante (par exemple : Lancelot et al. 2004, Pinheiro & Wan 2010, Daouadji et al. 2011, Prunier et al. 2016) et a constitué un point central à mon travail de thèse. Aussi, nous rappelons ici uniquement les éléments essentiels à la cohérence du présent document.

Le travail du second ordre  $W_2$  s'exprime en un point matériel (au sens de la mécanique des milieux continus) comme le produit des tenseurs de contrainte  $d\sigma$  et de déformation  $d\varepsilon$  incrementaux résultant d'un incrément de chargement appliqué au matériau considéré (autrement dit,  $d\sigma$  et  $d\varepsilon$  sont dépendant l'un de l'autre via le comportement constitutif du matériau). Le travail du second ordre peut s'exprimer indifféremment à partir des paramètres de chargement  $l_i$  et de réponse  $r_i$ . Dans le cadre des petites déformations et en négligeant les changements de géométrie (Nicot et al. 2007),  $W_2$  est donné par<sup>1</sup> :

$$W_2 = d\sigma : d\varepsilon = dl : dr \quad (2.4)$$

Si le long du chemin de chargement le travail du second ordre s'annule ou prend des valeurs négatives,  $W_2 \leq 0$ , alors les états mécaniques correspondant constituent des états limites (généralisés). L'expression du travail du second ordre à partir des paramètres de chargement et de réponse présente l'avantage de mettre en évidence le paramètre relatif à l'annulation du travail du second ordre, soit en d'autres termes le paramètre passant par un extremum et conduisant à une rupture effective s'il est utilisé comme un paramètre de contrôle.

Par exemple, pour une compression drainée axisymétrique autour de la direction 1 ( $\sigma_2 = \sigma_3$  et  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ), l'espace de chargement est réduit à une dimension  $n = 2$ , et le travail du second ordre s'écrit :

$$W_2 = dl_1 dr_1 + 2 dl_2 dr_2 = d\varepsilon_1 d\sigma_1 + 2 d\sigma_3 d\varepsilon_3 \quad (2.5)$$

Puisque l'opérateur impose que  $dl_2 = d\sigma_3 = 0$ ,  $W_2$  se simplifie :

$$W_2 = d\varepsilon_1 d\sigma_1 \quad (2.6)$$

Au cours d'une compression drainée, seul le paramètre  $\sigma_1$  présente un maximum (sous la forme d'un pic ou d'un plateau) auquel  $d\sigma_1$ , et donc aussi  $W_2$ , s'annulent ( $d\varepsilon_1$  reste toujours positif), et comme le montre la figure 2.1 c'est bien à ce maximum de  $\sigma_1$  que la rupture effective a pu être initiée.

L'état limite rencontré le long d'une compression non drainée (toujours en axisymétrie) sur un matériau lâche, tel qu'illustré sur les figures 2.3 et 2.4, peut être identifié de la même manière. En exprimant le travail du second ordre à partir des paramètres de chargement on a dans ce cas :

$$W_2 = dl_1 dr_1 + dl_2 dr_2 = dq d\varepsilon_1 + d\varepsilon_V d\sigma_3 \quad (2.7)$$

1. Le symbole « : » représente le produit doublement contracté de deux tenseurs.

Comme l'opérateur impose  $dl_2 = d\varepsilon_V = d\varepsilon_1 + 2 d\varepsilon_3 = 0$  alors :

$$W_2 = dq d\varepsilon_1 \quad (2.8)$$

et l'annulation du travail du second ordre est concomitant à un extremum du déviateur de contrainte  $q$  (si jamais il y en a un),  $d\varepsilon_1$  restant toujours positif. Une nouvelle fois, les figures 2.3 et 2.4 montrent que c'est bien à un maximum de  $q$  qu'un état limite généralisé a été rencontré et à partir duquel la rupture s'est effectivement produite lorsque le paramètre  $q$  était le paramètre de contrôle.

En s'appuyant sur la notion d'état limite généralisé, on se rend compte qu'il n'y a pas de différence (à l'échelle macroscopique) entre les conditions d'initiation et les premiers instants de développement de la rupture effective le long d'un chemin de compression drainée (associée à un état limite en contrainte) d'une part, et le développement de la rupture effective au cours d'une compression non drainée (associée à un état limite généralisé) d'autre part. Dans les deux cas la rupture effective s'initie à partir d'un état limite si le paramètre de contrôle est celui associé avec l'annulation du travail du second ordre et si le taux de variation imposé pour ce paramètre de contrôle correspond à un « chargement » par rapport à cet état limite. Si par exemple pour une compression non-drainée il est imposé  $dq < 0$  au pic de  $q$  la rupture effective n'est pas déclenchée, de la même manière qu'elle n'est pas déclenchée si  $d\sigma_1 < 0$  est imposé à l'état limite, en contrainte, atteint à la suite d'une compression drainée.

Ainsi, les états limites en contraintes peuvent être vus comme un cas particulier des états limites généralisés où  $l \equiv \sigma$  et  $r \equiv \varepsilon$ . Cette description généralisée de la rupture est aussi en accord avec le cadre élasto-plastique classique. Selon ce dernier, la rupture plastique survient si l'état de contrainte appartient à la condition limite de plasticité (décrite formellement par  $f(\sigma) = 0$ , avec  $f$  la surface de rupture, et si les paramètres de chargement sont tous des composantes du tenseur de contrainte définis tels que  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \sigma > 0$  (si  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \sigma < 0$  alors il se produit une décharge, sans rupture).

### 2.1.3 Application à des chemins de chargement proportionnels en déformation

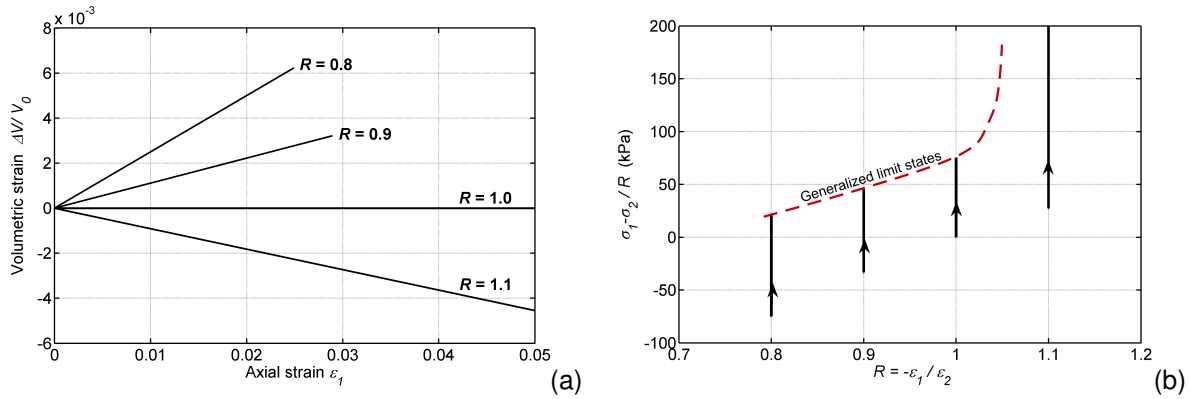
Les notions vues dans la première partie de ce chapitre sont applicables à tous chemins de chargement. Ainsi, on considère ici les chemins proportionnels en déformation qui sont une généralisation du chemin isochore (ou non drainé). Pour des chargements biaxiaux, en 2D, cela implique qu'un des paramètres de chargement soit défini tel que  $l_1 = \varepsilon_1 + R\varepsilon_2 = 0$ . Où la valeur de  $R$  est fixée pour un chemin de chargement donné : avec  $R = 1$  on retrouve la condition isochore, alors que pour  $R > 1$  le chemin est contractant, et il est dilatant pour  $R < 1$ . On définit le second paramètre de chargement  $l_2 = \varepsilon_1$  qui sera alors la paramètre de contrôle (en imposant  $\dot{l}_2 = \dot{\varepsilon}_1 = \text{cst.} > 0$ ) de l'évolution de l'état mécanique du matériau le long du chemin de chargement (fonction de  $R$ ) tel qu'on peut le représenter sur la figure 2.6a. Paramètres de chargements et paramètres de réponse sont conjugués tels que :

$$\sum_{i=1}^{n=2} l_i r_i = (\varepsilon_1 + R\varepsilon_2) \sigma_2/R + \varepsilon_1(\sigma_1 - \sigma_2/R) = \sum_{i=1}^{n=2} \sigma_i \varepsilon_i \quad (2.9)$$

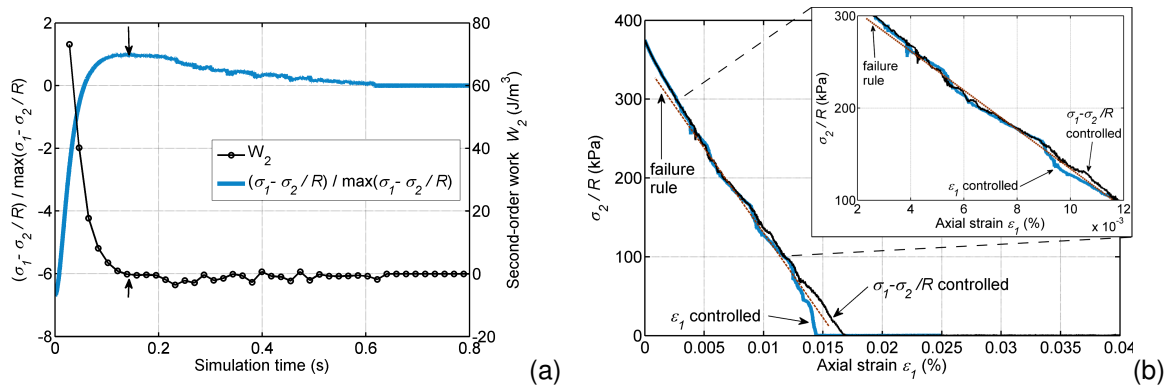
Ainsi  $r_1 = \sigma_2/R$  et  $r_2 = \sigma_1 - \sigma_2/R$  constituent les paramètres de réponse.

Pour des valeurs de  $R$  suffisamment petites (fonction de la densité initiale), c'est-à-dire pour un chemin suffisamment dilatant, le travail du second ordre s'annule le long du chemin chargement comme représenté sur la figure 2.7a. La vérification de ce critère sur le travail du second ordre indique qu'un état limite est atteint relatif au paramètre de réponse  $r_2 = \sigma_1 - \sigma_2/R$  qui présente un extremum ( $dr_2 = d\sigma_1 - d\sigma_2/R = 0$ ) à cet état limite (ce que l'on retrouve





**FIGURE 2.6** – Chemins de chargements proportionnels en déformation représentés dans un espace défini en déformation (déformation volumique et déformation axiale) (a), et dans un espace généralisé, ou « mixte » car défini en contrainte et en déformation, où il est possible de représenter les états limites généralisés associés à ces chemins de chargement (déterminés à partir d'un modèle DEM d'un échantillon moyennement dense).

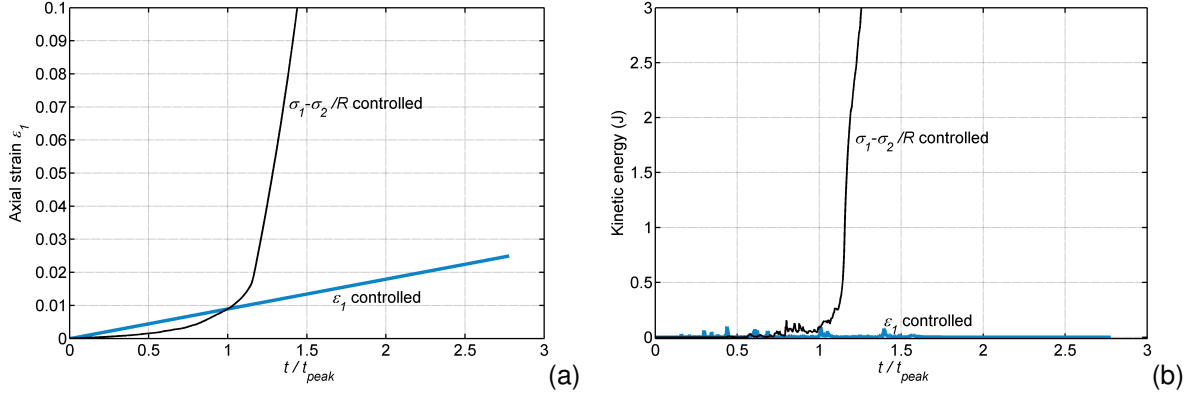


**FIGURE 2.7** – (a) travail du second ordre et paramètre de réponse  $r_2 = \sigma_1 - \sigma_2/R$  au cours d'un chemin proportionnel en déformation contrôlé en déformation ( $\dot{l}_2 = \dot{\epsilon}_1 = \text{cst.} > 0$ ) et simulé par DEM (échantillon dense,  $R = 0,46$ ); (b) définition, pour ce type de chemin de chargement de la règle de rupture dans un espace « mixte ».

aisément analytiquement sachant que  $dl_1 = d\epsilon_1 + R d\epsilon_2 = 0$ ). De tels états limites peuvent par exemple être représentés dans le plan  $(\sigma_1 - \sigma_2/R)$  versus  $(R = -\epsilon_1/\epsilon_2)$  de la figure 2.6b, où l'abscisse du plan représente le paramètre de chargement  $l_1 = 0$ .

L'existence de ces états limites peut être vérifiée en définissant comme paramètre de contrôle  $\dot{l}_2 = \dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2/R = \text{cst.} > 0$  tout en conservant les mêmes chemins de chargement définis par la condition sur le paramètre de chargement :  $l_1 = \epsilon_1 + R\epsilon_2 = 0$ . Dans ces conditions l'extremum atteint précédemment sur le paramètre  $\sigma_1 - \sigma_2/R$  n'est pas dépassé (bien qu'on le tente), et la rupture effective est provoquée, caractérisée sur la figure 2.8 par le soudain accroissement du taux de déformation et de l'énergie cinétique

Pour conclure rappelons que, à un état limite, les paramètres de chargement sont stationnaires ( $dl = 0$ ) impliquant que  $\mathbf{N} dr = 0$  (Darve et al. 2004). En 2D (mais cela est également valable en 3D) cette dernière relation conduit au fait que les paramètres de réponses, inclus dans le tenseur réponse  $r$ , sont linéairement reliés. Cela est vrai à un état limite en contrainte (lorsque  $l \equiv \sigma$ ) où  $\mathbf{N} d\epsilon = 0$  est alors la règle d'écoulement fixant une direction dans l'espace des déformations incrémentales ; mais aussi pour un état limite généralisé où, par extension, la relation  $\mathbf{N} dr = 0$  est appelée la « règle de rupture » (Darve et al. 2004). Dans ce cas les paramètres de réponses appartiennent à un espace « mixte » (défini à partir de variables de



**FIGURE 2.8** – Comparaison, suivant le paramètre de contrôle, de la déformation axiale (a) et de l'énergie cinétique (b) au cours d'un chemin de chargement proportionnel en déformation simulé par DEM (échantillon moyennement dense  $R = 0,8$ ), le temps est normalisé par  $t_{peak}$  qui représente le temps auquel l'état limite généralisé est atteint.

contrainte et de déformation) et la règle de rupture fixe une direction de la réponse incrémentale dans cet espace mixte. La figure 2.7b illustre cette règle de rupture dans le cas d'un chargement proportionnel en déformation en 2D, où l'espace des réponses est représenté par le plan  $\sigma_2/R$  versus  $\varepsilon_1$ .

## 2.2 Développement de la rupture effective et mode de rupture

### 2.2.1 La rupture effective : une bifurcation vers une réponse dynamique

La rupture effective est le résultat de la frustration du comportement constitutif du matériau par le chargement externe qui lui est appliqué. Le chargement externe, défini par l'imposition de variables statiques et cinématiques à la frontière de l'assemblage granulaire (soient les paramètres de chargement et de contrôle) n'est alors plus équilibré par les contraintes internes que le matériau est en mesure de développer dans les conditions qui lui sont définies, et une partie du travail des forces externes se traduit en bouffées d'énergie cinétique comme illustré par exemple sur les figures 2.1, 2.3, ou 2.8. Il y a ainsi un lien direct entre travail des forces externes, travail des contraintes internes et énergie cinétique exprimé à travers le théorème de l'énergie cinétique écrit ici sous forme incrémentale (en l'absence de forces de gravité) :

$$dE_c(t) = \int_{S_\Gamma} \vec{s} \cdot d\vec{u} dS - \int_V \boldsymbol{\sigma} : d\varepsilon dV \quad (2.10)$$

où  $\vec{s}$  est la distribution de contrainte externe appliquée sur la frontière  $S_\Gamma$  du volume  $V$  du solide et  $d\vec{u}$  le champs de déplacement incrémental des points solides.

Néanmoins, la rupture effective s'initie à partir d'un état limite, et un état limite est caractérisé par une valeur nulle ou négative du travail du second ordre. On peut donc se demander s'il y a une relation entre l'annulation du travail du second ordre à un état limite et la bifurcation du régime de déformation vers un régime dynamique lorsque la rupture effective s'initie. Cette relation est démontrée par Nicot et al. (2012), elle s'appuie sur la dérivée du théorème de l'énergie cinétique (2.10) (soit la dérivée seconde de l'énergie cinétique) conduisant à :

$$d^2 E_c(t) \approx \int_{S_\Gamma} d\vec{s} \cdot d\vec{u} dS - \int_V d\boldsymbol{\sigma} : d\varepsilon dV \quad (2.11)$$

L'égalité de l'équation (2.11) n'est pas rigoureuse d'un point de vue analytique car elle suppose que les déformations restent petites et les changements de géométrie négligeables. L'égalité peut être démontrée de manière plus générale dans le cadre d'un formalisme lagrangien, impliquant entre autres le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, que nous avons évité ici par soucis de simplicité. Toutefois, comme nous le verrons plus loin, dans les cas qui nous intéressent où l'on peut supposer les déformations petites et les changements de géométrie négligeables, les erreurs induites par l'utilisation de l'expression 2.11 sont du second ordre (voir la vérification dans (Sibille 2006)).

Par ailleurs, le développement limité au deuxième ordre de l'énergie cinétique au voisinage du temps  $t_0$  s'écrit :

$$E_c(t_0 + \Delta t) = E_c(t_0) + \dot{E}_c(t_0) \Delta t + \frac{\ddot{E}_c(t_0)}{2} (\Delta t)^2 + o((\Delta t)^2) \quad (2.12)$$

D'autre part l'énergie cinétique est définie par  $E_c(t) = \frac{1}{2} \int_V \rho \|\dot{\vec{u}}\|^2 dV$  (avec  $\rho$  la masse volumique du solide), donc  $\dot{E}_c(t) = \int_V \rho \dot{\vec{u}} \cdot \ddot{\vec{u}} dV$ . De plus, on suppose au temps  $t_0$  le milieu à l'équilibre statique soit  $\dot{\vec{u}} = \vec{0}$  et  $E_c(t_0) = \dot{E}_c(t_0) = 0$ .

Dans ces conditions, et en remarquant que  $\ddot{E}_c = d^2 E_c / dt^2$ , l'équation (2.12) s'écrit :

$$E_c(t_0 + \Delta t) = \frac{d^2 E_c(t_0)}{2 dt^2} (\Delta t)^2 + o((\Delta t)^2) \quad (2.13)$$

En faisant tendre  $\Delta t \rightarrow dt$  et en combinant les équations (2.13) et (2.11) on obtient finalement l'expression de l'énergie cinétique au voisinage d'un état d'équilibre statique :

$$E_c(t_0 + dt) \approx \frac{1}{2} \left[ \int_{S_T} d\vec{s} \cdot d\vec{u} dS - \int_V d\sigma : d\varepsilon dV \right] \quad (2.14)$$

Cette équation, valable uniquement dans le cas d'un état d'équilibre à  $t_0$ , montre que l'évolution de l'énergie cinétique à partir de cet équilibre peut s'exprimer comme la concurrence entre un terme de frontière ( $\int_{S_T}$ ), que l'on peut qualifier de travail du second ordre « externe », et le travail du second ordre « classique » ( $\int_V$ ), que l'on peut qualifier ici par opposition de travail du second ordre « interne ». Le terme de frontière dépend directement du programme de chargement appliqué par l'opérateur, alors que le travail du second ordre « interne » est dépendant du comportement constitutif du matériau. Comme  $E_c \geq 0$ , nécessairement  $\int_{S_T} \geq \int_V$ , l'égalité étant maintenue en l'absence de rupture effective.

La méthode des éléments discrets (DEM) permet la prise en compte des termes inertiels relatifs à chacune des particules constituant le milieu granulaire étudié. De plus, les positions et vitesses des particules sont mises à jour à chaque pas de temps numérique suivant un schéma d'intégration explicite en temps de l'accélération issue du principe fondamental de la dynamique. Autrement dit, la DEM permet de décrire à tout temps l'équilibre dynamique d'un assemblage granulaire (à condition que la stabilité du schéma d'intégration explicite soit assuré en respectant le pas de temps critique). Toutefois, comme pour des essais de laboratoire, une réponse quasi-statique peut être décrite par la DEM si l'opérateur choisi d'appliquer à l'assemblage numérique de grains un taux de déformation suffisamment faible (pour lequel l'influence des effets inertiels est négligeable)<sup>2</sup>. Aussi, nous avons profité de la capacité de la DEM à décrire aussi bien des réponses proches de l'équilibre statique que des réponses dynamiques pour caractériser l'initiation du développement de la rupture effective d'un assemblage granulaire et en particulier la validité de l'équation 2.14.

2. Voir par exemple la discussion par da Cruz et al. (2005) au sujet du taux de déformation réduit.

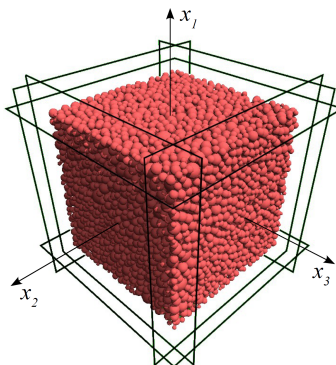
### 2.2.1.1 Contrainte interne et chargement externe

Dans le cas d'une réponse dynamique du matériau, le chargement externe n'est plus équilibré par les contraintes internes développées par le matériau en question. Il est donc nécessaire de différencier pour le modèle numérique utilisé le chargement externe de l'état de contrainte interne.

Le chargement externe est appliqué à l'assemblage granulaire de forme parallélépipédique par l'intermédiaire de 6 murs rigides englobant l'échantillon (voir la figure 2.9). En présence de murs parfaitement lisses, il n'y a pas de forces tangentielles aux contacts mur-grain et les contraintes principales coïncident avec les normales aux murs. Aussi chaque composante principale du tenseur de contrainte peut être prescrite à la frontière de l'assemblage granulaire en jouant sur la position des murs (dont la rotation est bloquée mais la mobilité en translation le long de leur normale est assurée). L'ajustement de la position des murs pour atteindre une valeur cible de contrainte est souvent assuré par un système d'asservissement calculant la correction à apporter sur la position du mur en comparant l'état de contrainte courant dans l'échantillon à l'état de contrainte cible et en considérant la rigidité (élastique) de l'assemblage granulaire. Cette méthode d'asservissement, où les murs sont considérés comme des objets non dynamiques permet de converger assez rapidement vers l'état de contrainte recherché. Toutefois, pour se rapprocher au mieux d'un contrôle réel en force aux frontières de l'échantillon par l'application de charges mortes (comme cela peut être réalisé par exemple sur le piston d'une cellule triaxiale de laboratoire), il a été choisi ici de considérer les murs comme des objets dynamiques. Ainsi, afin de prescrire la contrainte principale dans la direction  $i$  de l'espace, une force externe  $f_i$  colinéaire à  $i$  est appliquée aux murs de normale  $i$ . Les murs suivent alors une translation suivant  $i$  jusqu'à atteindre un état d'équilibre lorsque la force  $f_i$  est équilibrée par la distribution de contrainte se développant à la frontière mur-échantillon. La contrainte ainsi prescrite est appelée contrainte externe et est notée :

$$s_i = \frac{f_i}{A_i} \quad (2.15)$$

avec  $A_i$  l'aire de la surface frontière mur-échantillon. Afin d'éviter un délai trop important de l'application de la contrainte externe  $s_i$ , à cause de l'inertie du mur (ce qui conduirait à dévier le contrôle en force vers un contrôle du taux de déformation), la masse de chacun des murs a été fixée à une valeur relativement faible, égale à 1 % de la masse totale de l'échantillon de grains.



**FIGURE 2.9** – Modèle numérique discret parallélépipédique entouré des 6 parois rigides et non frottantes permettant de contrôler les conditions aux limites.

L'état de contrainte interne est évalué à partir de l'opérateur de contrainte moyenne proposé par Love (1927) et Weber (1966) :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{\text{contacts}} f_i^c l_j^c \quad (2.16)$$

où  $\vec{f}^c$  et  $\vec{l}^c$  sont respectivement la force de contact et le vecteur branche au contact courant  $c$ . En cas de non équilibre statique l'équation 2.16 n'est plus valable. Toutefois, il a été vérifié que les expressions plus générales et valables hors équilibre (voir par exemple Goddard (1998)) conduisaient à des résultats identiques même pour les plus hauts taux de déformation réduit ( $I = 9.10^{-4}$ ) rencontrés pour ces simulations.

Nous distinguons ainsi les contraintes principales externes (représentatives du chargement statique appliqué à la frontière de l'échantillon) notées  $s_1$ ,  $s_2$ , et  $s_3$ , des contraintes principales internes notées  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , et  $\sigma_3$ . On peut alors définir :

- la pression moyenne externe  $p_s = (s_1 + s_2 + s_3)/3$ ,
- et le déviateur de contrainte externe  $q_s = (s_1 - s_3)$ .

Par souci de différenciation :

- la contrainte moyenne interne est notée  $p_\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ ,
- et le déviateur de contrainte interne  $q_\sigma = (\sigma_1 - \sigma_3)$ .

### 2.2.1.2 Application à des chargement homogènes

Dans l'application que nous traitons ci-après, l'état de contrainte et de déformation est homogène, aussi le deuxième terme du membre de droite de l'équation 2.14 s'écrit :

$$\int_V d\sigma : d\varepsilon dV = W_2 V \quad (2.17)$$

De plus, pour les échantillons parallélépipédiques considérés numériquement (cf. Fig. 2.9) la distribution de contrainte  $\vec{s}$  et le déplacement  $\vec{u}$  sont uniformes sur chaque face de l'échantillon, et égaux pour des faces opposées normales à une même direction de l'espace  $i$ . Enfin, seules des composantes normales à ces faces sont appliquées et notées  $s_i$  et  $u_i$  ainsi :

$$\int_{S_\Gamma} d\vec{s} \cdot d\vec{u} dS = \sum_{i=1}^3 ds_i du_i S_i \quad (2.18)$$

Or  $du_i = d\varepsilon_i L_i$ , où  $L_i$  est la longueur du milieu dans la direction normale à  $S_i$ , et :

$$\sum_{i=1}^3 ds_i du_i S_i = \sum_{i=1}^3 ds_i d\varepsilon_i L_i S_i = V \sum_{i=1}^3 ds_i d\varepsilon_i \quad (2.19)$$

Par conséquent, dans le cas d'un milieu homogène avec, pour chacune des directions de l'espace, une distribution uniforme des contraintes et déformations appliquées à sa frontière l'équation (2.14) décrivant l'évolution de l'énergie cinétique à partir d'un état d'équilibre s'écrit simplement :

$$E_c(t_0 + dt) \approx \frac{V}{2} \left[ \sum_i ds_i d\varepsilon_i - W_2 \right] \quad (2.20)$$

ou encore :

$$E_c(t_0 + dt) \approx \frac{V}{2} [B_2 - W_2] \quad (2.21)$$

où  $B_2 = \sum_i ds_i d\varepsilon_i$  représente le travail du second ordre « externe » équilibré en partie ou en totalité par le travail du second ordre « interne »  $W_2$ .

Nous considérons les cas de deux échantillons numériques (toujours décrits par un assemblage de sphère et une loi de contact purement frottante, voir les détails dans (Nicot et al. 2012)), l'un dense est soumis à une compression triaxiale drainée alors que l'autre, lâche est comprimé en condition isochore (i.e. non drainée). Les chemins des réponses respectives sont présentés sur la figure 2.10. Pour chacun des deux cas l'échantillon numérique est stabilisé à un état d'équilibre noté  $M_A$  pour la compression drainée et  $M_B$  pour la compression non drainée.  $M_A$  et  $M_B$  constituent tous deux des états limites :

- en contrainte pour  $M_A$  situé après le pic de contrainte axiale  $\sigma_1$ ,
- généralisé pour  $M_B$  situé après le pic du déviateur de contrainte  $q_\sigma$ .

Nous examinons l'évolution des paramètres impliqués dans la relation entre l'énergie cinétique et le travail du second ordre lorsque la rupture effective est déclenchée à partir de ces états limites. Pour déclencher la rupture on tente de forcer ces derniers en imposant un incrément de chargement via le paramètre de contrôle  $s_1$  pour la compression drainée (tout en maintenant une contrainte radiale  $s_2 = s_3 = \text{constante}$ ), et via  $q_s$  pour la compression non drainée (tout en maintenant une déformation volumique nulle)<sup>3</sup>. Pour cela :

- l'incrément  $\Delta s_1 = 2$  kPa (soit moins de 1 % de  $\sigma_1$  à  $M_A$ ) est imposé à partir de  $M_A$ ,
- et l'incrément  $\Delta q_s = 1,6$  kPa est appliqué à partir de  $M_B$  (soit 3,7 % de  $q_\sigma$  à  $M_B$ ).

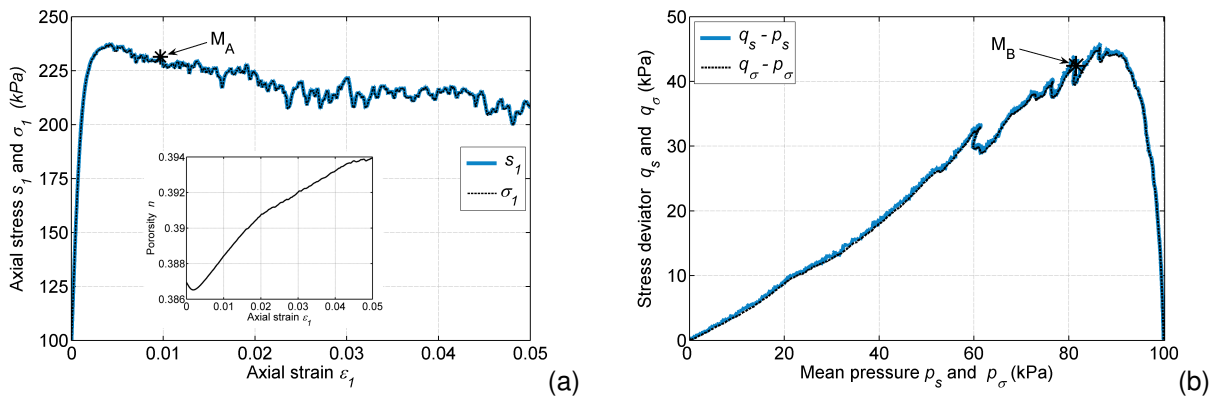
Ces deux incréments de chargement sont appliqués graduellement au cours de quelques centaines d'itérations afin de limiter la création et la propagation d'ondes élastiques. La figure 2.11 montre que l'application de ces deux incréments de chargement au-delà des états limites identifiés ne sont pas équilibrés par les contraintes internes  $\sigma_1$  et  $q_\sigma$  respectivement<sup>4</sup>. L'incrément de temps  $\Delta t$  est décompté à partir de l'initiation de l'application de l'incrément du chargement externe.

La figure 2.12 compare les différents termes impliqués dans l'équation 2.21 lorsqu'on s'éloigne de l'instant d'application de l'incrément de chargement externe (i.e. pour  $\Delta t$  croissant). Etant donné que la rupture effective est initiée par cet incrément de chargement, il se développe de manière logique une bouffée d'énergie cinétique  $E_c$  et le terme relatif au travail du second ordre interne  $W_2$  est négatif (puisque'il y a franchissement d'un état limite pour le chemin de chargement appliqué). L'équation 2.21 est vérifiée sur la figure 2.13 où l'énergie cinétique  $E_c$  est comparée, à partir de l'instant d'application des incréments de chargement, au terme de droite de l'équation,  $V/2(B_2 - W_2)$ , traduisant le non équilibre entre les travaux du second ordre externe  $B_2$  et interne  $W_2$ . L'équation 2.21 est relativement bien vérifiée pour des temps  $\Delta t$  suffisamment court ( $< 0.05$  s dans le cas de l'application de  $\Delta s_1$ , et  $< 0.08$  s suite à l'application de  $\Delta q_s$ ). L'erreur diverge ensuite pour des temps plus grands pour lesquels on s'éloigne du domaine de validité du développement limité au deuxième ordre (équations 2.12 et 2.13) et de l'hypothèse de petites déformations.

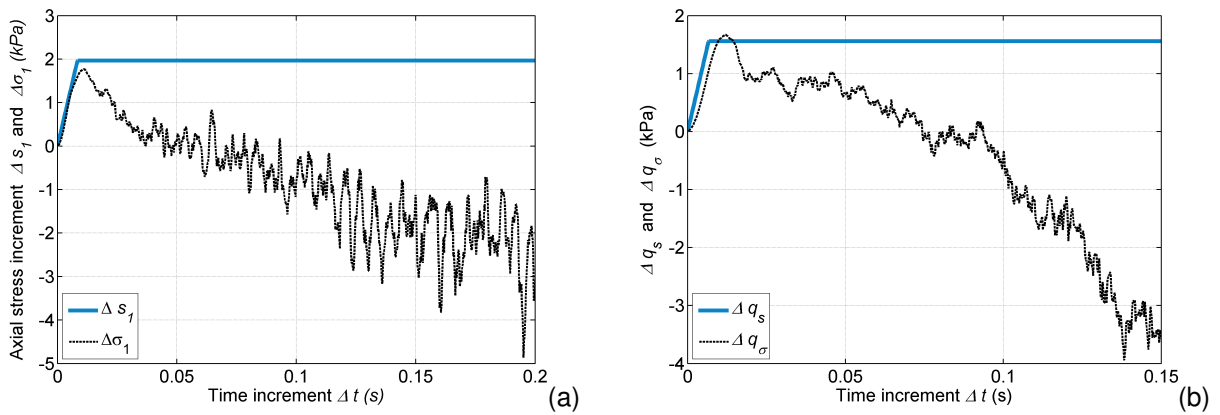
Ces résultats numériques confirment néanmoins le sens physique donné au travail du second ordre  $W_2$  à travers l'équation (2.21) : à l'initiation de la rupture effective à partir d'un état limite, la bouffée d'énergie cinétique caractéristique de la rupture est directement liée au travail du second ordre permettant l'identification de l'état limite en question.

3. La procédure numérique permettant un contrôle simultané de paramètres généralisés de chargement en contrainte (tel que  $q$ ) et en déformation (tel que  $\varepsilon_v$ ) est décrite dans (Sibille et al. 2009 et Sibille 2006).

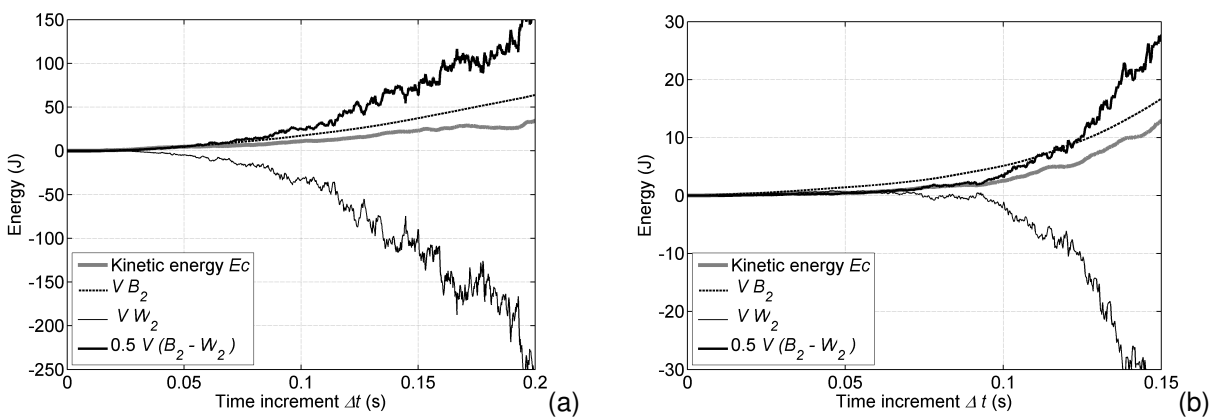
4. En toute rigueur on constate initialement un accroissement des contraintes internes, équilibrant temporairement l'accroissement de chargement externe, dû probablement à une résistance résiduelle acquise lors des phases de stabilisation aux points  $M_A$  et  $M_B$  respectivement.



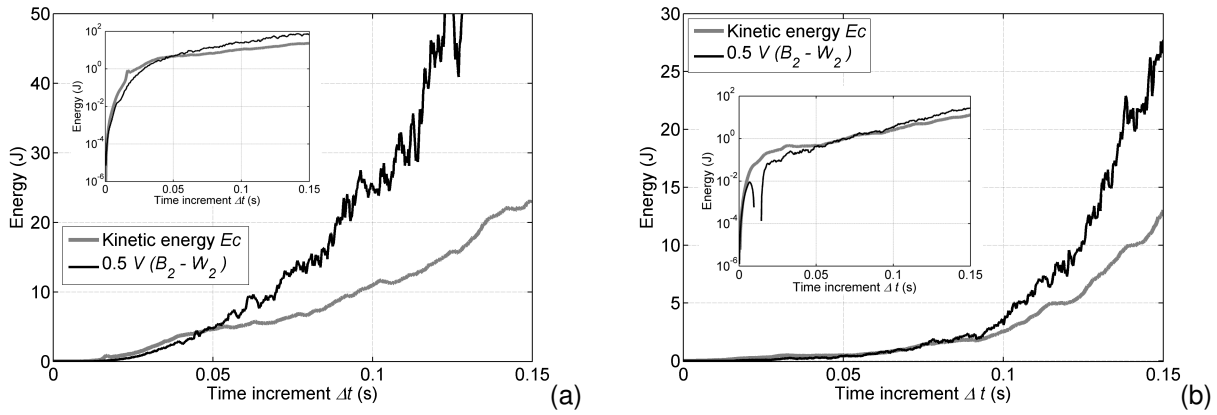
**FIGURE 2.10** – Echantillon numérique dense comprimé en condition drainée (a) et échantillon lâche comprimé en condition non-drainée (b), les contraintes externes  $s$  sont ici équilibrées à tout moment par les contraintes interne  $\sigma$  (courbes confondues).



**FIGURE 2.11** – Incréments de chargement extérieurs  $s_1$  (a) et  $q_s$  (b), appliqués respectivement à partir des états d'équilibre  $M_A$  et  $M_B$ , et réponse en terme de contraintes internes  $\Delta \sigma_1$  et  $\Delta q_o$  respectivement.



**FIGURE 2.12** – Comparaison de l'énergie cinétique  $E_c$ , et des termes relatifs aux travaux du second ordre "externe" ( $V B_2$ ) et "interne" ( $V W_2$ ) suite à l'application des incréments de chargement  $\Delta s_1$  (a) et  $\Delta q_s$  (b).



**FIGURE 2.13** – Comparaison de l'énergie cinétique,  $E_c$ , et du membre de droite de l'équation (2.21), impliquant les travaux du second ordre "externe" et "interne",  $V/2(B_2 - W_2)$ , suite à l'application des incréments de chargement  $\Delta s_1$  (a) et  $\Delta q_s$  (b) (représentation en échelle semi-logarithmique en encart).

## 2.2.2 Rupture diffuse et rupture localisée

Pour compléter cette description de la rupture il y a lieu de tenir compte de l'occurrence possible d'un mode de rupture localisé avec par exemple la formation de bandes de cisaillement. Le sujet de la localisation des déformations a déjà été largement étudié, l'objectif ici est de tenter de donner des éléments de réponse aux questions suivantes : le chemin de chargement suivi peut-il avoir une influence sur le développement de bandes de cisaillement à la rupture ? Pour un chemin de chargement donné, le développement de bandes de cisaillement (ou leur absence) peut-il être affecté par le choix du paramètre de contrôle, ou autrement dit par l'occurrence effective, ou non, de la rupture ?

L'initiation d'une bande de cisaillement de normale  $\vec{n}$  est décrite analytiquement par le critère de Rice (1976) correspondant à l'annulation du déterminant du tenseur acoustique  $\det(\vec{n}^t \mathbf{M} \vec{n}) = 0$  (avec  $\mathbf{M}$  le tenseur constitutif). Ainsi le critère de Rice peut être utilisé en complément du critère sur le travail du second ordre pour évaluer le mode de rupture, diffus ou localisé. Si les deux critères, du travail du second ordre et de Rice, sont vérifiés alors on s'attend à une localisation des déformations pour former une bande de cisaillement avec l'occurrence de la rupture au sein de cette bande de cisaillement. Si seul le travail du second ordre est vérifié, sans le critère de Rice, il n'y aura pas de développement de bande de cisaillement, et la rupture s'initiera de manière diffuse dans l'ensemble de l'échantillon (soumis à un état de contrainte-déformation homogène). Notons que le critère de Rice ne peut pas être vérifié sans que le critère sur le travail du second ordre le soit (Bigoni & Hueckel 1991, Bigoni 2000, Nicot & Darve 2011).

Le critère de Rice dépend du tenseur constitutif  $\mathbf{M}$  qui, pour les matériaux granulaires, dépend lui-même de la direction de chargement, la relation constitutive étant incrémentalement linéaire par morceau (voire incrémentalement non linéaire). Le tenseur  $\mathbf{M}$  diffère donc d'une zone tensorielle<sup>5</sup> à une autre, et le critère de Rice dépend de ce fait indirectement de la direction de chargement. Lorsque que le critère de Rice est vérifié, il l'est pour une, ou plusieurs zone(s) tensorielle(s) complète(s), mais pourrait ne pas être vérifié pour d'autres zones tensorielles. Ainsi, on peut imaginer, pour un matériau donné, un chemin de chargement inclus dans une zone tensorielle pour laquelle la bande de cisaillement se développe ; alors que celle-ci serait inexistante pour un autre chemin de chargement appartenant à une autre zone tensorielle.

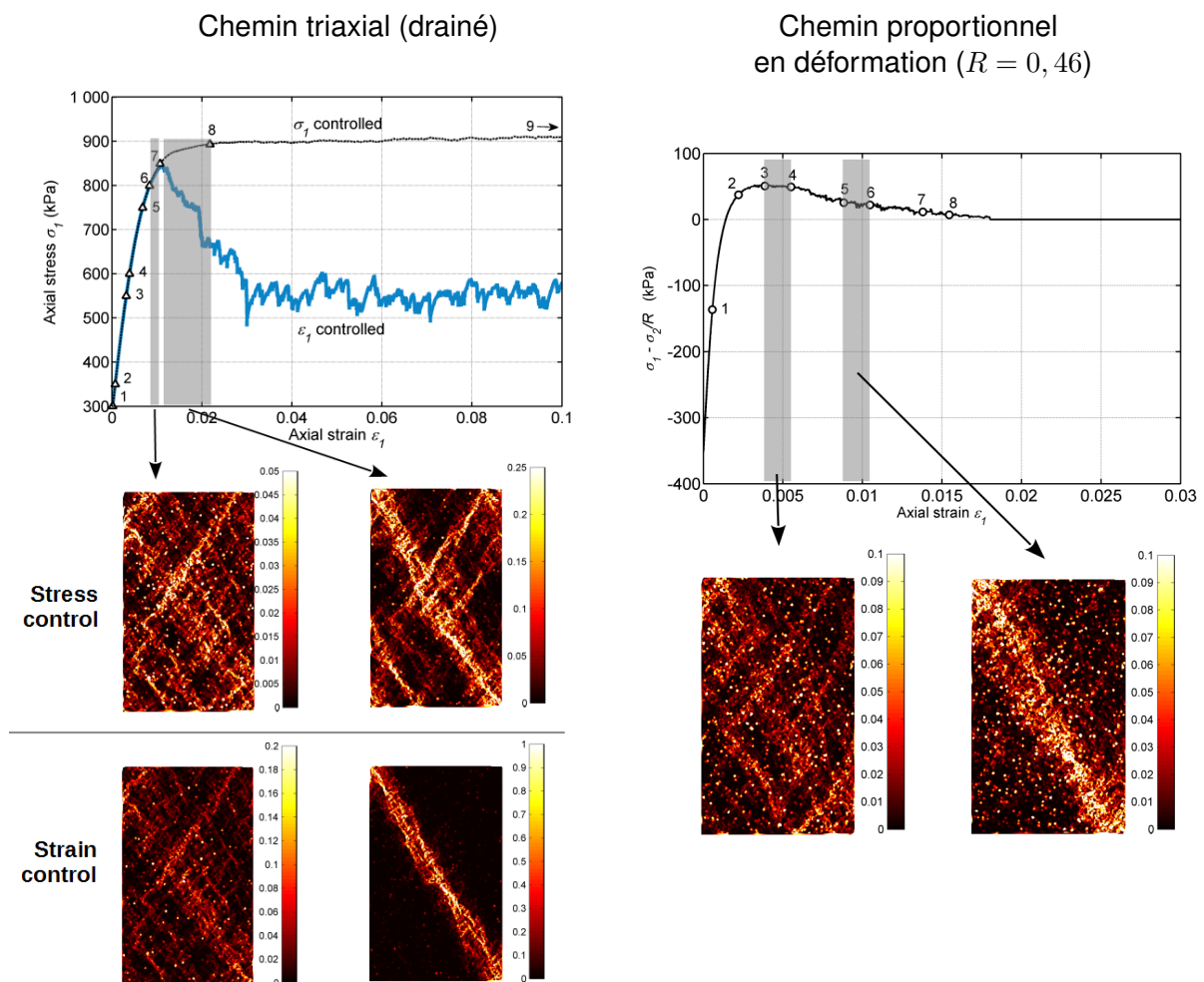
5. Une zone tensorielle est un hypercône de l'espace des incréments de chargement pour lequel la relation constitutive est linéaire. Par conséquent, le tenseur constitutif est indépendant de la direction de chargement à l'intérieur d'une même zone tensorielle.



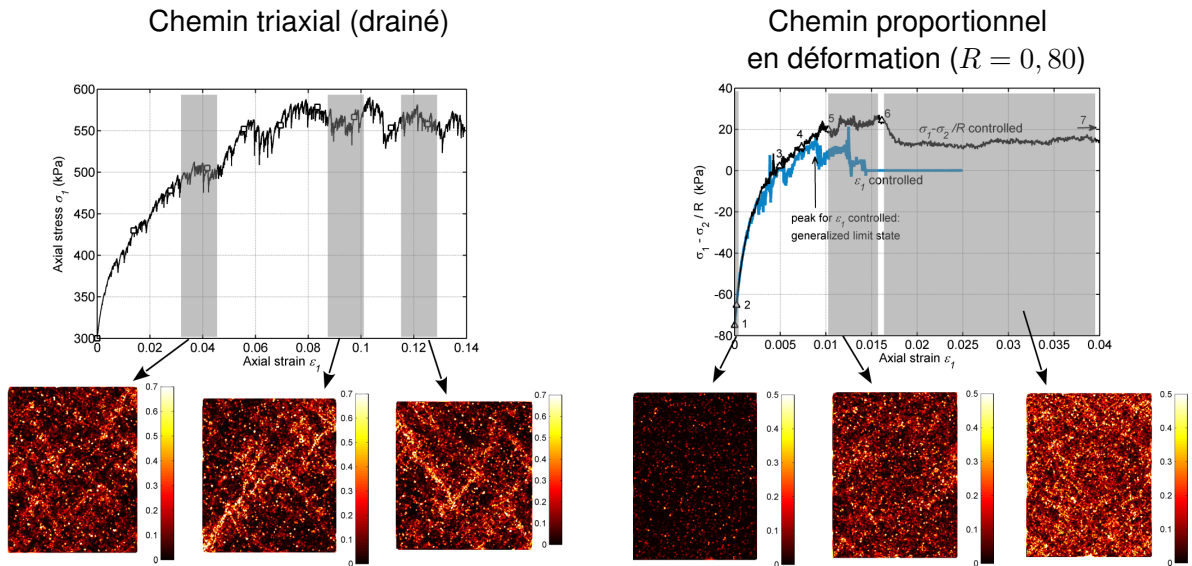
Sur les figures 2.14 et 2.15 sont résumés les expériences numériques réalisés sur des modèles numériques discrets 2D. Deux échantillons sont considérés, l'un initialement dans un état dense et présentant un comportement bien dilatatant en compression drainée, l'autre dans un état moyennement dense et faiblement dilatatant (voir les détails donnés par Sibille et al. 2015c).

Concernant l'échantillon dense, le développement d'une bande de cisaillement à l'approche et surtout au-delà des états limites rencontrés sur les chemins de compression biaxiale drainée, et proportionnel en déformation est clairement visible (Fig. 2.14). L'occurrence de cette bande de cisaillement ne dépend pas ici du mode de contrôle (en déformation ou en contrainte pour la compression biaxiale drainée) et donc de l'occurrence ou pas de la rupture effective, ni du chemin de chargement suivi (biaxial drainé ou proportionnel en déformation). Seul le motif des bandes de cisaillement (très sensible aux hétérogénéités du milieu et aux conditions aux limites) subit quelques variations.

Pour l'échantillon moyennement dense, le développement de bandes de cisaillement est dépendant du chemin de chargement suivi. Faiblement marquées pour le chemin biaxial drainé (occurrence d'une rupture localisée), aucune bande de cisaillement n'est observable pour le chemin proportionnel en déformation (Fig. 2.15) pour lequel il y a occurrence d'une rupture diffuse.



**FIGURE 2.14** – Champs de déformation incrémentale (intensité du cisaillement) sur un échantillon dense pour un chemin de chargement en compression biaxiale drainée avec ou sans occurrence de la rupture effective (à gauche) ; et pour un chemin de chargement proportionnel en déformation (à droite), sans occurrence de la rupture effective.

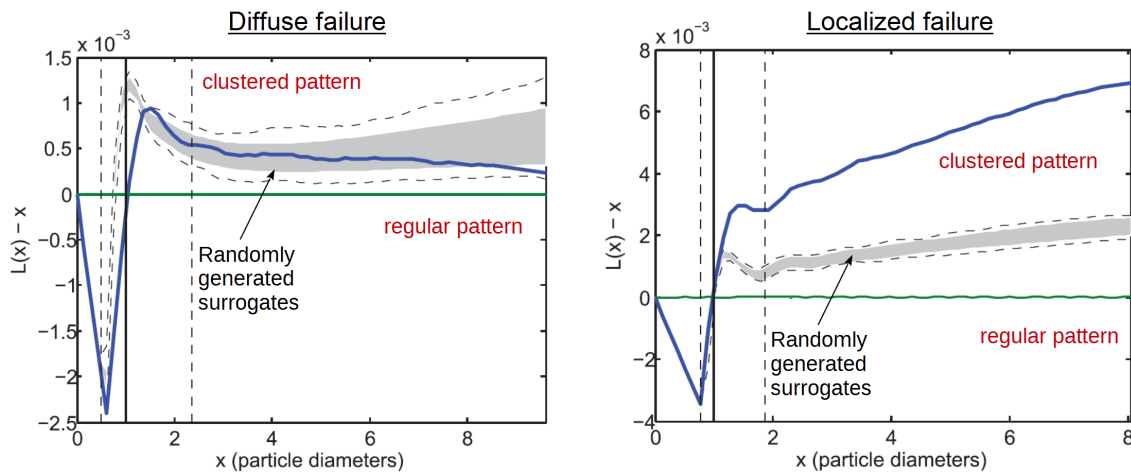


**FIGURE 2.15** – Champs de déformation incrémentale (intensité du cisaillement) sur un échantillon moyennement dense pour un chemin de chargement en compression biaxiale drainée (à gauche, sans occurrence de la rupture effective) ; et pour un chemin de chargement proportionnel en déformation (à droite) dans le cas de l'occurrence de la rupture effective (contrôle en  $\sigma_1 - \sigma_2/R$ ).

Le caractère diffus de la rupture a été vérifié à l'échelle microscopique en caractérisant la distribution spatiale des particules impliquées dans des chaînes de force en cours de flambement (Tordesillas et al. 2012). Le chargement mécanique externe, et en particulier la partie déviatoire du tenseur des contraintes est repris au sein du milieu granulaire par des chaînes de forces (Dantu 1957, Rajai et al. 1999) constituées de particules relativement alignées les unes par rapport aux autres et transmettant des forces de contact supérieures à la moyenne. A l'échelle macroscopique la rupture se traduit entre autres par le flambement de ces chaînes de force (qu'il est possible de détecter en suivant l'évolution de la courbure de ces chaînes de forces) (Tordesillas et al. 2010). La distribution spatiale des particules incluses dans les chaînes de force en flambement est caractérisée par le résidu de la fonction L de Ripley qui, comparé aux résidus issus d'échantillons formés de manière aléatoire (distribution aléatoire des particules appartenant aux chaînes de force en flambement), permet de reconnaître des distributions agrégée, régulières, ou aléatoires. Sur la figure 2.16 est présenté le résidu de la fonction L de Ripley pour un échantillon dont la rupture est considérée comme diffuse, et comparé à un échantillon où la rupture est localisée. Clairement, dans le cas de la rupture diffuse les chaînes de force en flambement sont distribuée de manière aléatoire (et homogène) dans l'échantillon, alors qu'elles sont regroupée en agrégats (regroupés dans la bande de cisaillement) lorsque la rupture est localisée.

Pour résumer, le mode de rupture semble d'après ces résultats indépendant du choix du paramètre de contrôle, ce qui est cohérent avec le fait que le paramètre de contrôle ne modifie pas le chemin de chargement (ou autrement dit, le direction de chargement pour un état de contrainte-déformation donné), et n'affecte donc pas l'expression de la relation constitutive à prendre en compte dans le critère de Rice. D'un autre côté, l'expression de la relation constitutive est dépendante de la direction de chargement et les résultats montrent que l'occurrence d'une rupture localisée peut être partiellement affectée par le chemin de chargement imposé au volume élémentaire représentatif. Toutefois, les résultats montrent également que la densité initiale de l'assemblage granulaire reste un facteur fortement déterminant vis-à-vis du mode de rupture.

Par ailleurs, le système étudié reste ici relativement contraint, on impose à l'assemblage



**FIGURE 2.16** – Résidu de la fonction  $L$  de Ripley calculé pour les particules appartenant aux chaînes de force en flambement, comparé aux résidus issus de 1000 échantillons générés aléatoirement (zone grisée) ; les lignes verticales représentent respectivement le plus petit diamètre de particule (tiretés), le diamètre moyen (trait continu), et le plus grand diamètre (tireté). D'après Tordesillas et al. (2012).

granulaire de conserver sa forme rectangulaire. On pourrait imaginer relâcher des degrés de liberté en autorisant par exemple la rotation de la paroi supérieure (en effet, en général les dispositifs expérimentaux dédiés à l'étude de la localisation ne contraignent pas autant la cinématique aux frontières de l'échantillon de sol, sauf dans le cas par exemple de l'ancienne presse TRITRI du 3SR, véritablement triaxiale). Dans ce dernier cas, la conclusion relative à l'influence du chemin de chargement pourrait être à reconsidérer.

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé un cadre général à la description de la rupture dans les sols et les milieux granulaires (mais il est également applicable aux autres matériaux non-visqueux et non-associés au sens de l'élasto-plasticité). Certes les éléments de base sur lesquels s'appuie ce cadre (critère du travail du second ordre, notion de perte de contrôlabilité, critère de Rice ...) ne sont pas nouveaux, mais nous avons tenté de les réunir pour le rendre aussi complet que possible : la rupture peut s'initier à partir d'un état limite identifié à partir du critère portant sur le signe du travail du second ordre, si le paramètre de contrôle conduit à un « chargement » par rapport à cet état limite. On parle alors de rupture effective caractérisée par la transformation d'une partie du travail des forces aux frontières en énergie cinétique. A l'initiation de la rupture effective, le lien entre travail du second ordre et croissance monotone de l'énergie cinétique apporte un nouvel éclairage sur le sens physique de ce travail du second ordre. La distinction entre rupture diffuse et rupture localisée a également pu être effectuée en comparant avec des outils statistiques adaptés la répartition des éléments micro-structuraux caractéristiques du développement de la rupture.

Aujourd'hui, même si cela n'est pas courant, ce cadre là est appliqué à des problèmes de génie civil, tels que la stabilité de parois clouées par exemple (Prunier et al. 2016), via une modélisation par éléments finis du problème. Il est alors nécessaire d'adopter une normalisation adéquat du travail du second ordre vis-à-vis de la méthode des éléments finis, afin de définir un critère global de stabilité à l'échelle de l'ouvrage étudié.

## **Chapitre 3**

# **Perspectives**

*Le contenu de ce chapitre a été supprimé dans cette version en ligne du mémoire.*

# Références

- Bagnold, R. (1956). The flow of cohesionless grains in fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 249(964), 235–297.
- Bagnold, R. (1980). An empirical correlation of bedload transport rates in flumes and natural rivers. *Proc. R. Soc. Lond. A* 372(1751), 453–473.
- Bendahmane, F., D. Marot, & A. Alexis (2008). Experimental parametric study of suffusion and backward erosion. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.* 134(1), 57–67.
- Bhatnagar, P. L., E. P. Gross, & M. Krook (1954). A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Phys. Rev.* 94(3), 511–525.
- Bigoni, D. (2000). Bifurcation and instability of non-associative elastoplastic solids. In H. Petryk (Ed.), *Material instabilities in elastic and plastic solids*, Volume 414 of *CISM courses and lectures*, pp. 1–52. Wien New York : Springer-Verlag.
- Bigoni, D. & T. Hueckel (1991). Uniqueness and localization- I. Associative and nonassociative elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures* 28(2), 197–213.
- Boltzmann, L. (1872). Weitere studien über das wärme-gleichgewicht unter gas-molekülen. *Wissenschaftliche Abhandlungen* 1, 316–402.
- Bonelli, S. (Ed.) (2012). *Erosion in Geomechanics Applied to Dams and Levees*. ISTE-Wiley.
- Bonelli, S. & D. Marot (2011). Micromechanical modeling of internal erosion. *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 15, 1207–1224.
- Briaud, J., F. Ting, H. Chen, Y. Cao, S. Han, & K. Kwak (2001). Erosion function apparatus for scour rate predictions. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 127(2), 105–113.
- Chambon, R. & D. Caillerie (1999). Existence and uniqueness theorems for boundary value problems involving incrementally non-linear models. *Int. J. Solids Structures*, 5089–5099.
- Chang, C. & P. Hicher (2005). An elastoplastic model for granular materials with microstructural consideration. *Int. J. of Solids and Structures* 42(14), 4258–4277.
- Chang, D. & L. Zhang (2011). A stress-controlled erosion apparatus for studying internal erosion in soils. *Geotechnical Testing Journal* 34(6), 1–11.
- Chapman, S. & T. Cowling (1991). *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases : An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases* (Cambridge University Press ed.).
- Chen, H., S. Chen, & W. Matthaeus (1992). Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method. *Physical Review A* 45(8), R5339–R5342.
- Chin, J. (2002). Lattice Boltzmann simulation of the flow of binary immiscible fluids with different viscosities using the Shan-Chen microscopic interaction model. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 360(1792), 547–558.
- Cundall, P. (1971). A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems. In *Proceedings of the symposium of the international society of rock mechanics*, Volume 1, pp. 132–150.
- Cundall, P. & O. Strack (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique* 29(1), 47–65.
- da Cruz, F., S. Emam, M. Prochnow, J. Roux, & F. Chevoir (2005). Rheophysics of dense granular materials : discrete simulation of plane shear flows. *Physical Review E* 72(2), 021309.

- Dantu, P. (1957). Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents. In *Proc. 4th Int. Conf. Soils Mech. Found.*, London, pp. 144–148.
- Daouadji, A., F. Darve, H. Al Gali, P. Hicher, F. Laouafa, S. Lignon, F. Nicot, R. Nova, M. Pinheiro, F. Prunier, L. Sibille, & R. Wan (2011). Diffuse failure in geomaterials : Experiments, theory and modelling. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 35(16), 1731–1773.
- Darve, F. (1990). *Geomaterials Constitutive Equations and Modelling*, Chapter Incrementally non-linear relationships, pp. 213–238. Taylor and Francis books.
- Darve, F., G. Servant, F. Laouafa, & H. Khoa (2004). Failure in geomaterials : continuous and discrete analyses. *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.* 193(27-29), 3057–3085.
- Darve, F., L. Sibille, A. Daouadji, & F. Nicot (2007). Bifurcations in granular media : macro- and micro-mechanics approaches. *Comptes Rendus Mécanique* 335(9-10), 496–515.
- di Prisco, C. & R. Nova (1994). Stability problems related to static liquefaction of loose sand. *Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks Chambon, Desrues, Vardoulakis (eds), Balkema*, 59–70.
- Enskog, D. (1917). *Kinetische theorie der vorgänge in mässig verdünnten gasen*. Ph. D. thesis, Uppsala.
- Fell, R. & J.-J. Fry (Eds.) (2007). *Internal erosion of dams and their foundations*. Taylor & Francis Publisher.
- Ferro, V. (1998). Evaluating overland flow sediment transport capacity. *Hydrological Processes* 12, 1895–1910.
- Frisch, U., D. D'Humières, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, & J. Rivet (1987). Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions. *Complex Systems* 1, 649–707.
- Goddard, J. (1998). *Physics of dry granular media*, Chapter Continuum modeling of granular assemblies. Kluwer Academic Publishers.
- Govers, G. (1992). Evaluation of transporting capacity formulae for overland flow. In A. Parsons and A. Abrahams (Eds.), *Overland flow*, pp. 243–273. UCL Press, London.
- Haghighi, I., C. Chevalier, M. Duc, S. Guédon, & P. Reiffsteck (2013). Improvement of hole erosion test and results on reference soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 139(2), 330–339.
- Hardy, J. (1973). Time evolution of a two-dimensional model system. *Journal of Mathematical Physics* 14(12), 1746.
- Hardy, J., O. Pazzis, & Y. Pomeau (1976). Molecular dynamics of a classical lattice gas : Transport properties and time correlation functions. *Physical Review A* 13(5), 1949–1961.
- Hill, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. of the Mech. and Phys. of Solids* 6, 239–249.
- Klisinski, M., M. Z., & K. Runesson (1992). Structure of constitutive equations in plasticity for different choices of state and control variables. *International Journal of Plasticity* 8(3), 221 – 243.
- Ladd, A. J. C. (1994). Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1. Theoretical foundation. *Journal of Fluid Mechanics* 271(1), 285.
- Lancelot, L., I. Shahrour, & M. Al Mahmoud (2004). Instability and static liquefaction on proportional strain paths for sand at low stresses. *Journal of Engineering Mechanics* 130(11), 1365–1372.
- Lominé, F., L. Scholtès, L. Sibille, & P. Poullain (2013). Modelling of fluid-solid interaction in granular media with coupled lb/de methods : application to piping erosion. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 37(6), 577–596. doi : 10.1002/nag.1109.
- Love, A. (1927). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Low, H. (1989). Effect of sediment density on bed-load transport. *Journal of Hydraulic Engineering* 115, 124–138.
- Marot, D., F. Bendahmane, F. Rosquoet, & A. Alexis (2009). Internal flow effects on isotropic confined sand-clay mixtures. *Soil & sediment contamination* 18, 294–306.
- Marot, D., L. Van Duong, J. Garnier, L. Thorel, & P. Audrain (2012). Study of scale effect in an internal erosion mechanism : centrifuge model and energy analysis. *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 16(1), 1–19.

- McNamara, G. & G. Zanetti (1988). Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Physical Review Letters* 61(20), 2332–2335.
- Moffat, R. & J. Fannin (2006). A large permeameter for study of internal stability in cohesionless soils. *Geotechnical Testing Journal* 29(4), 273–279.
- Montellà, E., M. Toraldo, B. Chareyre, & L. Sibille (2016). Localized fluidization in granular materials : theoretical and numerical study. *Physical Review E*, **Soumis**.
- Moreau, J. (1997). Numerical investigation of shear zones in granular materials. In *Friction, Arching, Contact Dynamics 1997*, Singapore, pp. 223–247. World Scientific.
- Muir-Wood, D., K. Maeda, & E. Nukudani (2008). Discrete element modelling of soil erosion. In *Proc. 4th Int. Conf. on Scour and Erosion*, Tokyo, pp. 491–496. The Japanese Geotechnical Society.
- Nicot, F. & F. Darve (2011). Diffuse and localized failure modes : two competing mechanisms. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 35(5), 586–601.
- Nicot, F., F. Darve, & H. Khoa (2007). Bifurcation and second order-work in granular materials. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 31, 1007–1032.
- Nicot, F., L. Sibille, & F. Darve (2012). Failure as a bifurcation toward a dynamic regime. *Int. J. of Plasticity* 29, 136–154.
- Nova, R. (1994). Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programmes. *J. Mech. behav. Mater.* 5(2), 193–201.
- Osinov, V. & W. Wu (2005). Instability and ill-posedness in the deformation of plastic solids : some correlations through simple examples. In Y. Wang and K. Hutter (Eds.), *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, Aachen, pp. 361–370. Shaker Verlag.
- Papamichos, E. & Vardoulakis (2005). Sand erosion with a porosity diffusion law. *Computers and Geotechnics* 32, 47–58.
- Papamichos, E., I. Vardoulakis, J. Tronvoll, & A. Skjaerstein (2001). Volumetric sand production model and experiment. *Int. J. Anal. Meth. Geomech.* 25, 789–808.
- Parchure, T. & A. Mehta (1985). Erosion of soft cohesive sediment deposits. *Journal of Hydraulic Engineering* 111(10), 1308–1326.
- Partheniades, E. (1965). Erosion and deposition of cohesive soils. *Journal of the Hydraulics Division* 91(1), 105–139.
- Pinheiro, M. & R. Wan (2010). Finite element analysis of diffuse instability using an implicitly integrated pressure-density dependent elastoplastic model. *Finite elements in analysis and design* 46, 487–495.
- Prunier, F., B. Chomette, M. Brun, & F. Darve (2016). Designing geotechnical structures with a proper stability criterion as a safety factor. *Computers and Geotechnics* 71, 98–114.
- Qian, Y., D. D’Humières, & P. Lallemand (1992). Lattice bkg models for navier-stokes equation. *Euro-physics Letters (EPL)* 17(6), 479–484.
- Rajaï, F., S. Roux, & J. Moreau (1999). Contact forces in a granular packing. *Chaos* 9(3), 544–550.
- Raniecki, B. & O. Bruhns (1981). Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain. *J. Mech. Phys. Solids* 29, 153.
- Reddi, L., I. Lee, & M. Bonala (2000). Comparison of internal and surface erosion using flow pump test on a sand-kaolinite mixture. *Geotechnical Testing Journal* 23(1), 116–122.
- Regazzoni, P. & D. Marot (2013). A comparative analysis of interface erosion tests. *Natural hazards* 67(2), 937–950. doi :10.1007/s11069-013-0620-3.
- Rice, J. (1976). The localization of plastic deformation. In W. Koiter (Ed.), *Theoretical and Applied Mechanics*, Delft, pp. 207–220. North-Holland Publishing Compagny.
- Runesson, K. & Z. Mroz (1989). A note on nonassociated plastic flow rules. *International Journal of Plasticity* 5(6), 639–658.
- Sail, Y., D. Marot, L. Sibille, & A. Alexis (2011). Suffusion tests on cohesionless granular matter. *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 15(5), 799–817.
- Scholtès, L., P. Hicher, & L. Sibille (2010). Multiscale approaches to describe mechanical responses induced by particle removal in granular materials. *Comptes Rendus Mécanique (CRAS)* 338(10-11), 627–638.

- Sibille, L. (2006). *Modélisations discrètes de la rupture dans les milieux granulaires*. Ph. D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Sibille, L. & F. Darve (2016). Modèles de comportement micro-mécaniques des géomatériaux. In *Construction / Mécanique des sols et géotechnique*. Techniques de l'Ingénieur. Réf : C221.
- Sibille, L., N. Hadda, F. Nicot, & F. Darve (2013). Une description générale de la rupture dans les sols et son implication dans la stabilité des ouvrages hydrauliques. In P. R. et Stéphane Bonelli (Ed.), *Digues maritimes et fluviales de protection contre les submersions - Dignes2013*, Aix en Provence, France, pp. 263–271. Hermes Science - Lavoisier.
- Sibille, L., N. Hadda, N. Nicot, A. Tordesillas, & F. Darve (2015c). Granular plasticity, a contribution from discrete mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 75, 119–139.
- Sibille, L., F. Lominé, P. Poullain, Y. Sail, & D. Marot (2015a). Internal erosion in granular media : direct numerical simulations and energy interpretation. *Hydrological Processes* 29(9), 2149–2163.
- Sibille, L., D. Marot, & Y. Sail (2015b). A description of internal erosion by suffusion and induced settlements on cohesionless granular matter. *Acta Geotechnica* 10(6), 735–748.
- Sibille, L., T. Mullin, & P. Poullain (2009). The effect of particle shape on the marginal rigidity state in 2d granular media. *Europhysics Letters (EPL)* 86, 44003.
- Sibille, L., F. Nicot, F. Donzé, & F. Darve (2009). Analysis of failure occurrence from direct simulations. *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 13, 187–201.
- Stavropoulou, M., P. Papanastasiou, & I. Vardoulakis (1998). Coupled wellbore erosion and stability analysis. *Int. J. Anal. Meth. Geomech.* 22, 749–769.
- Sterpi, D. (2003). Effects of the erosion and transport of fine particles due to seepage flow. *International Journal of Geomechanics* 3(1), 111–122.
- Succi, S. (2001). *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press.
- Tordesillas, A., S. Pucilowski, L. Sibille, F. Nicot, & F. Darve (2012). Multiscale characterisation of diffuse granular failure. *Philosophical Magazine* 92(36), 4547–4587.
- Tordesillas, A., D. Walker, & Q. Lin (2010). Force cycles and force chains. *Physical. Review. E* 81, 011302.
- Valanis, K. (1985). On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials. *J. Applied Mechanics* 52, 649–653.
- Vardoulakis, I., M. Stavropoulou, & P. Papanastasiou (1996). Hydro-mechanical aspects of the sand production problem. transport in porous media. *Transport in porous media* 22, 225–244.
- Wan, C. & R. Fell (2004). Investigation of internal erosion and piping of soils in embankment dams by the slot erosion test and the hole erosion test. UNICIV Report 412, University of New South Wales.
- Weber, J. (1966). Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents. *Bulletin de Liaison des Ponts-et-Chaussées* 20, 1–20.
- Wolfram, S. (1986). *Theory and Applications of Cellular Automata*. World Scientific Pub Co Inc.