



HAL
open science

Bornes de Cramér-Rao Intrinsèques pour l'estimation de la matrice de dispersion normalisée dans les distributions elliptiques

Florent Bouchard, Arnaud Breloy, Alexandre Renaux, Guillaume Ginolhac

► To cite this version:

Florent Bouchard, Arnaud Breloy, Alexandre Renaux, Guillaume Ginolhac. Bornes de Cramér-Rao Intrinsèques pour l'estimation de la matrice de dispersion normalisée dans les distributions elliptiques. GRETSI 2019, Aug 2019, Lille, France. hal-02388701

HAL Id: hal-02388701

<https://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-02388701>

Submitted on 2 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Bornes de Cramér-Rao Intrinsèques pour l'estimation de la matrice de dispersion normalisée dans les distributions elliptiques

Florent BOUCHARD¹, Arnaud BRELOY², Alexandre RENAUX³, Guillaume GINOLHAC¹.

¹ LISTIC - Université Savoie Mont-Blanc, ² LEME, Université Paris Nanterre, ³ L2S, Université Paris-Sud. *

florent.bouchard@univ-smb.fr

Résumé – Dans un processus d'estimation robuste, les estimateurs de la matrice de dispersion sont souvent obtenus à un facteur d'échelle près. La plupart des traitements adaptatifs étant invariants à ce facteur d'échelle, on s'intéresse principalement à l'estimation de la dispersion normalisée. Ainsi, dans le contexte des distributions elliptiques complexes, et en se plaçant dans le cadre introduit par [1], nous proposons dans cette communication une dérivation de la borne de Cramér-Rao intrinsèque pour ce problème. Tout d'abord, la métrique de Fisher est dérivée pour les matrices symétriques définies positives de déterminant unitaire. Cette métrique permet ensuite d'établir une borne d'estimation pour deux mesures de performance : la distance euclidienne et la distance riemannienne entre les matrices Hermitiennes positives définies.

Abstract – Robust scatter matrix estimators are often obtained up to a scaling factor. Since most of the adaptive processes are invariant to this scaling ambiguity, we are mostly interested in estimating a normalized scatter matrix. In the context of complex elliptical symmetric distributions, and the framework of [1], we propose to develop the intrinsic Cramér-Rao bound for this problem. First, the Fisher information metric is derived for Hermitian positive definite matrices of unit determinant. This metric allows to bound two performance criteria, that are the Euclidian and Riemmanian distances.

1 Introduction

La borne de Cramér-Rao (BCR), outil usuel en traitement statistique du signal, caractérise les performances optimales qu'un estimateur peut espérer atteindre en terme d'erreur quadratique moyenne (EQM)[3]. Elle est de plus désormais utilisée afin de servir de critère pour optimiser les paramètres externes d'un système complexe. Lorsque le paramètre d'intérêt appartient à une variété Riemannienne, deux problèmes se posent :

i) Le paramètre satisfait naturellement un système d'équations qu'il n'est pas possible d'explicitier pour appliquer les BCRs développées dans un cadre d'estimation sous contrainte [4].

ii) On peut, de plus, se poser la question de la légitimité de la métrique euclidienne traditionnellement utilisée pour décrire l'EQM. En effet, l'utilisation d'une distance naturelle Riemannienne vis-à-vis du problème d'estimation semble plus appropriée pour ce type de paramètres.

Afin de répondre à ces problématiques, plusieurs inégalités de Cramér-Rao dites intrinsèques ont été établies et étudiées dans la littérature [1, 5, 6]. En particulier, dans [1], une formulation très générale de la BCR est présentée sous la forme d'une inégalité matricielle pour la covariance du logarithme riemannien. Cette quantité qui représente une EQM naturelle est supérieure (au sens matricielle) à une matrice où apparaît la matrice d'information de Fisher ainsi que des termes de courbures Riemanniennes. Notamment, cette inégalité matricielle est valide quelque soit la métrique utilisée et permet ainsi de

calculer des BCR sur des distances associées à n'importe quelle métrique. Cette borne intrinsèque a ensuite été calculée dans le contexte de l'estimation de la matrice de covariance d'un vecteur gaussien à l'aide de la distance riemannienne naturelle des matrices hermitiennes définies positives que nous noterons \mathcal{H}_M^{++} et a permis d'observer des phénomènes statistiques inconnus dans le cadre euclidien (e.g., l'apparition d'un biais d'estimation caractérisable à distance finie).

Le but de cette communication est d'étendre les résultats de [1], d'une part à la classe des distributions elliptiques complexes (EC), d'autre part à la matrice de dispersion normalisée. En effet, les distributions EC [7] sont d'un grand intérêt pour la communauté du traitement du signal car elles ont montré leurs capacités à modéliser une grande variété de phénomènes physiques [8, 9] et permettent de développer des estimateurs robustes. Néanmoins, les estimateurs robustes de la matrice de dispersion sont souvent obtenus à un facteur d'échelle près. La plupart des traitements adaptatifs sont invariants à ce facteur d'échelle : on s'intéresse donc principalement à l'estimation de la dispersion normalisée. Des bornes intrinsèques pour le cas non normalisé ont déjà été proposé dans une communication précédente [10], néanmoins, la prise en compte de la normalisation requiert son analyse propre. Nous établissons donc l'inégalité de Cramér-Rao intrinsèque pour ce problème, ce qui permet ensuite d'établir une borne d'estimation pour deux mesures de performance : la distance euclidienne et la distance riemannienne entre les matrices hermitiennes positives définies. Certains liens sont aussi établis avec les résultats obtenus dans le cadre euclidien [11, 12].

* Cette communication présente un extrait des résultats obtenus dans [2]. Une partie de ces travaux est financée par l'ANR-ASTRID MARGARITA (ANR-17-ASTR-0015)

2 Distributions elliptiques complexes

Les distributions EC regroupent une large famille de distributions multivariés (voir [7] pour un tour d’horizon complet). Un vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^M$ suit une distribution EC à moyenne nulle que nous noterons $\mathbf{z} \sim \mathcal{CES}(\mathbf{0}, \Sigma, g)$ si il admet la représentation stochastique $\mathbf{z} \stackrel{d}{=} \sqrt{Q} \Sigma^{1/2} \mathbf{u}$ où $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^M$ suit une distribution uniforme sur la sphère unité complexe, $Q \in \mathbb{R}^+$ est une variable aléatoire réelle non-négative admettant une densité de probabilité p indépendante du vecteur \mathbf{u} , et $\Sigma^{1/2} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ est une factorisation de la matrice de dispersion Σ . Nous nous focalisons uniquement sur le cas absolument continu, c’est-à-dire que $\Sigma \in \mathcal{H}_M^{++}$. La densité de probabilité (ddp) de \mathbf{z} peut alors s’écrire

$$f(\mathbf{z}|\Sigma, g) \propto |\Sigma|^{-1} g(\mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z}), \quad (1)$$

où la fonction $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, appelée génératrice de densité, est reliée à la ddp de Q par l’équation suivante :

$$p(Q) = \delta_{M,g}^{-1} Q^{M-1} g(Q). \quad (2)$$

Il faut remarquer que cette définition présente un problème d’identifiabilité due à une ambiguïté d’échelle. En effet, pour $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, il est clair que les couples $\{Q, \Sigma\}$ et $\{Q/\tau, \tau\Sigma\}$ conduisent à la même distribution pour \mathbf{z} . L’impact de cette ambiguïté est faible puisque la plupart des traitements adaptatifs ne requièrent l’estimation de la matrice de dispersion qu’à un facteur d’échelle près. C’est pourquoi, nous noterons $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{V}$, où \mathbf{V} est la matrice de dispersion normalisée (notre paramètre d’intérêt) et le scalaire σ^2 représente le facteur d’échelle. Dans la suite, nous utilisons la normalisation canonique par le déterminant comme préconisé dans [13]. Ce choix de normalisation est particulièrement intéressant car il permet de préserver la géométrie de \mathcal{H}_M^{++} . On en déduit que \mathbf{V} appartient à la sous-variété de \mathcal{H}_M^{++} des matrices de déterminant unitaire :

$$\mathcal{SH}_M^{++} = \{\mathbf{V} \in \mathcal{H}_M^{++} \mid |\mathbf{V}| = 1\}. \quad (3)$$

Une manière simple pour redéfinir une distribution EC $\mathbf{z} \sim \mathcal{CES}(\mathbf{0}, \Sigma, g)$ telle que la matrice de dispersion soit naturellement normalisée est d’absorber le facteur d’échelle dans la ddp de Q . Poser $Q' \stackrel{d}{=} \sqrt[M]{|\Sigma|} Q$, donne en effet $\mathbf{z} \sim \mathcal{CES}(\mathbf{0}, \mathbf{V}, \tilde{g})$, où \tilde{g} est définie par $p(Q')$ et (2).

A partir des données $\{\mathbf{z}_k\}_{k \in [1, K]}$ distribuées comme $\mathbf{z} \sim \mathcal{CES}(\mathbf{0}, \Sigma, g)$ l’estimateur du maximum de vraisemblance de la matrice de dispersion est la solution de l’équation du point fixe suivante [7] :

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \psi\left(\mathbf{z}_k^H \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}_k\right) \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H, \quad (4)$$

où $\psi(t) = -g'(t)/g(t)$. On notera qu’en pratique, la fonction génératrice de densité g peut être inconnue. Dans le cadre de la théorie de l’estimation robuste, un M -estimateur $\hat{\Sigma}$ est un estimateur construit en utilisant une fonction $\psi(t)$ qui n’est pas nécessairement liée à g dans (4). Il est à noter que les M -estimateurs peuvent ne pas être consistents en terme d’échelle.

Une méthode pratique est alors de se concentrer sur l’estimation de la matrice de dispersion normalisée en construisant $\hat{\mathbf{V}} = \hat{\Sigma} / \sqrt[M]{|\hat{\Sigma}|}$, pour un M -estimateur (ou le maximum de vraisemblance) de la matrice de dispersion $\hat{\Sigma}$.

3 Métrique de Fisher induite par les distribution EC

Dans cette partie, nous étudions la vraisemblance (1) sur \mathcal{SH}_M^{++} du point de vue de la géométrie de l’information. L’étude portant sur \mathcal{H}_M^{++} à été présentée dans [10]. Premièrement, notons que l’espace tangent $T_\Sigma \mathcal{H}_M^{++}$ à \mathcal{H}_M^{++} au point Σ s’identifie à \mathcal{H}_M , et que l’espace tangent à \mathcal{SH}_M^{++} au point \mathbf{V} est défini par

$$T_{\mathbf{V}} \mathcal{SH}_M^{++} = \{\Omega \in \mathcal{H}_M \mid \text{Tr}\{\mathbf{V}^{-1} \Omega\} = 0\}. \quad (5)$$

Concernant la métrique de Fisher, nous obtenons le résultat suivant :

Theorem 3.1. Soient Ω_1 et Ω_2 deux vecteurs de $T_{\mathbf{V}} \mathcal{SH}_M^{++}$. La métrique de Fisher du modèle $\{\mathbf{z}_k\}_{k \in [1, K]}$, i.i.d. avec $\mathbf{z} \sim \mathcal{CES}(\mathbf{0}, \mathbf{V}, \tilde{g})$, $\mathbf{V} = \Sigma / \sigma^2 \in \mathcal{SH}_M^{++}$, est donnée par

$$g_{\mathbf{V}}^{fim}(\Omega_1, \Omega_2) = K g_{\mathbf{V}}^{ces}(\Omega_1, \Omega_2), \text{ avec} \quad (6)$$

$$g_{\mathbf{V}}^{ces}(\Omega_1, \Omega_2) = \tilde{\alpha} \text{Tr}\{\mathbf{V}^{-1} \Omega_1 \mathbf{V}^{-1} \Omega_2\}$$

et $\tilde{\alpha} = \frac{1}{\sigma^4} \left(1 - \frac{\mathbb{E}[Q^2 \phi'(Q)]}{M(M+1)}\right)$, avec $\sigma^2 = \sqrt[M]{|\Sigma|}$ et $\phi(t) = -\psi(t) = g'(t)/g(t)$.

Démonstration. Dans [2] la métrique de Fisher associée à (1) sur \mathcal{SH}_M^{++} est donnée par

$$g_{\Sigma}^{fim}(\Omega, \Omega) = K \alpha \text{Tr}\left\{(\Sigma^{-1} \Omega)^2\right\} + K \beta \text{Tr}^2\{\Omega \Sigma^{-1}\},$$

avec $\alpha = 1 - \frac{\mathbb{E}[Q^2 \phi'(Q)]}{M(M+1)}$, $\beta = \alpha - 1$, et $\Omega \in T_\Sigma \mathcal{H}_M^{++}$. La métrique correspondante sur \mathcal{SH}_M^{++} s’obtient en notant que $\mathbf{V} = \Sigma / \sigma^2 \in \mathcal{SH}_M^{++}$ et en simplifiant le second terme car $\Omega \in T_\Sigma \mathcal{SH}_M^{++}$ satisfait la relation (5). Finalement, (6) s’obtient avec une formule de polarisation. \square

Il est intéressant de noter que $g_{\mathbf{V}}^{ces}$ est proportionnelle à la métrique naturelle riemannienne sur \mathcal{SH}_M^{++} pour toute distribution EC. Ainsi, la distance induite par la métrique de Fisher correspond à la distance donnée en (10) à un facteur d’échelle près.

4 BCR intrinsèque pour la matrice de dispersion normalisée

Dans cette partie, nous dérivons une BCR sur l’estimation de \mathbf{V} selon deux mesures de performance : la distance euclidienne et la distance riemannienne entre les matrices Hermitiennes positives définies. Cette dérivation s’appuie sur le formalisme des BCR intrinsèques et les étapes décrites dans [1].

L'étape clé repose sur la construction appropriée d'une base orthonormale (selon la métrique de mesure d'erreur) de l'espace tangent $T_{\Sigma} \mathcal{SH}_M^{++}$ dans (5).

4.1 Métrique euclidienne

Rappelons tout d'abord la métrique et la distance euclidienne pour l'espace des matrices définies positives

$$\begin{aligned} g^E(\Omega_1, \Omega_2) &= \text{Tr}\{\Omega_1 \Omega_2\}, \\ d_E^2(\Sigma_1, \Sigma_2) &= \|\Sigma_1 - \Sigma_2\|_F^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Le calcul d'une BCR sur d_E^2 nécessite la définition des bases suivantes :

- $\{\Omega_i^E\}_{i \in [1, M^2]}$ représente une base de $T_{\Sigma} \mathcal{H}_M^{++}$ dans (5) qui est orthonormale par rapport à la métrique g^E dans (7). En pratique, on utilise la base canonique euclidienne dont les éléments sont :

1. Ω_{ii}^E est une matrice symétrique de taille $n \times n$ dont $i^{\text{ème}}$ élément diagonal est égal à 1 (zéro partout ailleurs).
2. Ω_{ij}^E est une matrice symétrique de taille $n \times n$ dont les éléments ij et ji sont égaux à $2^{-1/2}$ (zéro partout ailleurs).
3. Ω_{ij}^{h-E} est une matrice hermitienne de taille $n \times n$ dont les éléments ij est égal à $2^{-1/2} \sqrt{-1}$ et l'élément ji est égal à $-2^{-1/2} \sqrt{-1}$, (zéro partout ailleurs) ($i < j$).

cette base est par la suite ré-indexée sur $i \in [1, M^2]$ pour alléger la notation.

- $\{\Omega_i^{spE}\}_{i \in [1, M^2-1]}$ représente une base de $T_{\Sigma} \mathcal{SH}_M^{++}$ dans (5) qui est orthonormale par rapport à la métrique g^E dans (7). Remarquons alors que $T_{\Sigma} \mathcal{SH}_M^{++}$ correspond à \mathcal{H}_M privé de la droite $\lambda \Sigma^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, puisque son complémentaire orthonormal est $N_{\Sigma} \mathcal{SH}_M^{++} = \{\lambda \Sigma^{-1} | \lambda \in \mathbb{R}\}$. En pratique, cette base orthonormale peut être obtenue en *i*) augmentant $\{\Omega_i^E\}_{i \in [1, M^2]}$ avec l'élément Σ^{-1} ; *ii*) appliquant un procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (en utilisant la métrique g^E dans (7) comme produit scalaire) sur l'ensemble augmenté en commençant par l'élément Σ^{-1} . Après ces étapes, nous obtenons l'ensemble $\{\gamma \Sigma^{-1}, \Omega_1^{spE}, \dots, \Omega_{M^2-1}^{spE}, \mathbf{0}\}$ (avec une normalisation appropriée γ), qui permet d'extraire la base désirée.

Theorem 4.1. *La BCR pour la distance d_E^2 et pour la matrice de dispersion normalisée s'écrit*

$$\mathbb{E} \left[d_E^2(\hat{\mathbf{V}}, \mathbf{V}) \right] \geq \text{Tr} \{ \mathbf{F}_{spE}^{-1} \}, \quad (8)$$

avec pour $i, j \in [1, M^2 - 1]$

$$[\mathbf{F}_{spE}]_{i,j} = K \tilde{\alpha} \text{Tr} \left\{ \mathbf{V}^{-1} \Omega_i^{spE} \mathbf{V}^{-1} \Omega_j^{spE} \right\}, \quad (9)$$

Démonstration. Les éléments de la matrice d'information de Fisher sont obtenus en utilisant $g_{\mathbf{V}}^{fim}$ dans (6) avec la base $\{\Omega_i^{spE}\}$. Le résultat est alors une application directe du corollaire 2 de [1] en négligeant les termes de courbure. \square

On note que ce résultat permet de calculer d'une manière originale la BCR euclidienne pour la matrice \mathbf{V} sans utiliser une paramétrisation qui assurerait un déterminant égal à 1.

4.2 Métrique naturelle riemannienne

Rappelons tout d'abord la métrique et la distance riemannienne pour l'espace des matrices définies positives (normalisées ou non)

$$\begin{aligned} g_{\Sigma}^N(\Omega_1, \Omega_2) &= \text{Tr}\{\Sigma^{-1} \Omega_1 \Sigma^{-1} \Omega_2\}, \\ d_N^2(\Sigma_1, \Sigma_2) &= \|\log(\Sigma_1^{-1/2} \Sigma_2 \Sigma_1^{-1/2})\|_F^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Le calcul d'une BCR sur d_N^2 nécessite la définition des bases suivantes :

- $\{\Omega_i^N\}_{i \in [1, M^2]}$ représente la base de $T_{\Sigma} \mathcal{H}_M^{++}$ qui est orthonormale par rapport à la métrique g_{Σ}^N dans (10). En pratique, cette base est obtenue en colorant les éléments de la base euclidienne de la manière suivante $\Omega_i^N = \Sigma^{1/2} \Omega_i^E \Sigma^{1/2}$.
- $\{\Omega_i^{spN}\}_{i \in [1, M^2-1]}$ représente la base de $T_{\Sigma} \mathcal{SH}_M^{++}$ dans (5) qui est orthonormale par rapport à la métrique g_{Σ}^N dans (10). En pratique, cette base est obtenue de la même manière que pour $\{\Omega_i^{spE}\}$, mais en utilisant cette fois-ci la métrique g_{Σ}^N dans (10) comme produit scalaire lors du procédé d'orthonormalisation. La base initiale doit néanmoins être complétée par l'élément Σ car le complémentaire orthogonal de $T_{\Sigma} \mathcal{SH}_M^{++}$ par rapport à g_{Σ}^N est $N_{\Sigma} \mathcal{SH}_M^{++} = \{\lambda \Sigma | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Theorem 4.2 (Natural Riemmanian CRLBs). *La BCR intrinsèque pour la distance d_N^2 et pour la matrice de dispersion normalisée s'écrit*

$$\mathbb{E} \left[d_N^2(\hat{\mathbf{V}}, \mathbf{V}) \right] \geq \frac{M^2 - 1}{K \tilde{\alpha}} \quad (11)$$

Démonstration. On injecte $\{\Omega_i^{spN}\}$ dans (6) ce qui donne pour les éléments de la matrice d'information de Fisher. Le résultat est $[\mathbf{F}_{spN}]_{i,j} = K \tilde{\alpha} \delta_{i,j}$, $\forall i, j \in [1, M^2-1]$, grâce à l'orthogonalité de $\{\Omega_i^{spN}\}$ par rapport à g_{Σ}^{nat} . La matrice d'information de Fisher peut alors s'écrire $\mathbf{F}_{spN} = K \tilde{\alpha} \mathbf{I}_{M^2-1}$. L'obtention de la trace de son inverse est alors triviale, et on applique une fois de plus le corollaire 2 de [1] (en négligeant les termes de courbure) pour conclure. \square

Il est intéressant de noter que la borne sur cette distance s'obtient de manière explicite, et qu'elle dépend simplement des dimensions du problème d'estimation et d'un scalaire lié au générateur de densité.

5 Simulations

Les résultats précédents sont illustrés pour une distribution multivariée de Student- t avec $d \in \mathbb{N}^*$ degrés de liberté (voir [7] pour les détails). On note $\mathbf{z} \sim \mathcal{CES}(\mathbf{0}, \Sigma, g_d)$ avec $g_d(t) = (1 + d^{-1}t)^{-(d+M)}$. De plus, $\phi(t) = -(d+M)/(d+t)$ et $\alpha = (d+M)/(d+M+1)$ pour (?). La matrice de dispersion est construite à partir de $[\Sigma_T]_{i,j} = \rho^{|i-j|}$ avec $\rho = 0.9 \sqrt{1/2} (1+i)$ puis normalisée. Nous comparons la BCR à quatre estimateurs *a*) l'estimateur de la covariance empirique $\hat{\Sigma}_{SCM} = K^{-1} \sum_{k=1}^K \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H$, noté SCM; *b*) l'estimateur du maximum de vraisemblance (4) avec $\psi(t) = -\phi(t)$,

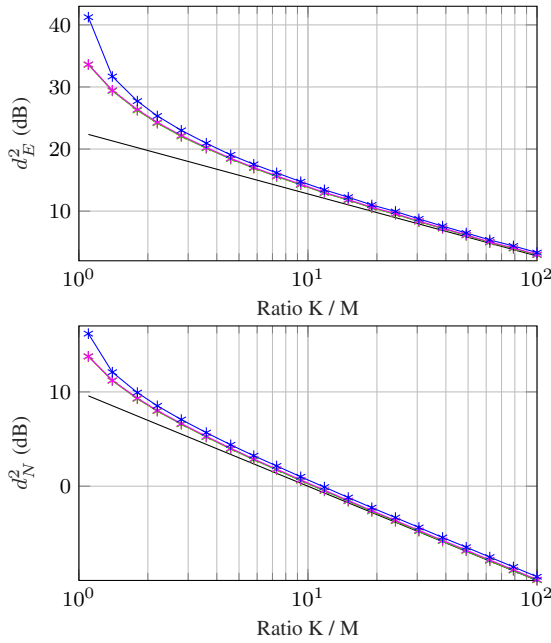


FIGURE 1 – BCR euclidienne (haut) et riemannienne (bas) en fonction de K/M pour $d = 100$. Légende : CRB, SCM, MLE, mMLE, TYL. $M = 10$.

noté MLE; c) l'estimateur du maximum de vraisemblance désadapté défini comme l'estimateur du maximum de vraisemblance classique où pour lequel on fixe $d = 10$ dans ψ quelle que soit la distribution sous-jacente, noté mMLE; d) le M -estimateur de Tyler, défini dans (4) avec $\psi(t) = M/Kt$, noté TYL. Afin d'illustrer nos résultats, nous comparons les performances des différents estimateurs aux BCR pour deux scénarii : $d = 100$ (cas quasi gaussien) et $d = 3$, présentés respectivement en figure 1 et 2. Les BCRs proposés permettent une comparaison pratique des différents M -estimateurs en utilisant les distances naturelle et euclidienne, et ce, indépendamment des ambiguïtés d'échelle inhérente aux distributions EC (e.g., le maximum de vraisemblance désadapté est biaisé en ce qui concerne l'estimation de la matrice de dispersion). Une telle comparaison est intéressante lorsque le traitement associé n'est pas sensible au facteur d'échelle (e.g., en filtrage adaptatif). On remarquera que les M -estimateurs ont des performances proches du maximum de vraisemblance. Cependant, ce n'est pas le cas de l'estimateur de la covariance empirique sauf dans le cas quasi-gaussien ($d = 100$). De manière surprenante, on note aussi que les deux distances montrent que tous les estimateurs étudiés sont non-efficace à distance finie.

Références

- [1] Steven T. Smith, "Covariance, subspace, and intrinsic Cramér-Rao bounds," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1610–1630, 2005.
- [2] Arnaud Breloy, Guillaume Ginolhac, Alexandre Renaux, and Florent Bouchard, "Intrinsic cramer-rao bounds for scatter and shape matrices estimation in ces distributions," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 26, no. 2, pp. 262–266, 2019.

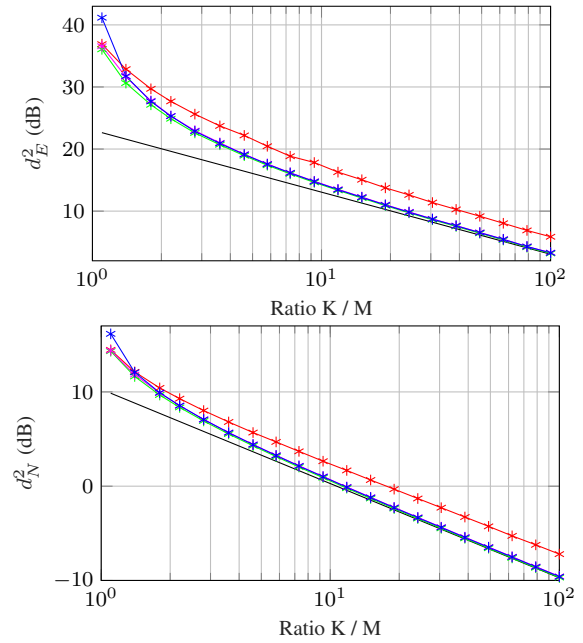


FIGURE 2 – BCR euclidienne (haut) et riemannienne (bas) en fonction de K/M pour $d = 3$. Légende : CRB, SCM, MLE, mMLE, TYL. $M = 10$.

- [3] Steven M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing*, Prentice Hall PTR, 1993.
- [4] John D. Gorman and Alfred O. Hero, "Lower bounds for parametric estimation with constraints," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 36, no. 6, pp. 1285–1301, 1990.
- [5] Joao Xavier and Victor Barroso, "Intrinsic variance lower bound (IVLB) : an extension of the Cramér-Rao bound to riemannian manifolds," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005. Proceedings.(ICASSP'05). IEEE International Conference on*, IEEE, 2005, vol. 5, pp. v–1033.
- [6] Nicolas Boumal, "On intrinsic Cramér-Rao bounds for riemannian submanifolds and quotient manifolds," *IEEE transactions on signal processing*, vol. 61, no. 7, pp. 1809–1821, 2013.
- [7] Esa Ollila, David E. Tyler, Visa Koivunen, and H. Vincent Poor, "Complex elliptically symmetric distributions : Survey, new results and applications," *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 60, no. 11, pp. 5597–5625, 2012.
- [8] Steeve Zozor and Christophe Vignat, "Some results on the denoising problem in the elliptically distributed context," *IEEE transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 1, pp. 134–150, 2010.
- [9] Esa Ollila, David E. Tyler, Visa Koivunen, and H. Vincent Poor, "Compound-Gaussian clutter modeling with an inverse gaussian texture distribution," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 19, no. 12, pp. 876–879, 2012.
- [10] Arnaud Breloy, Alexandre Renaux, Guillaume Ginolhac, and Florent Bouchard, "Borne de cramer-rao intrinsèque pour la matrice de covariance des distributions elliptiques complexes," in *GRETSI 2017*, 2017.
- [11] Maria Greco and Fulvio Gini, "Cramér-Rao lower bounds on covariance matrix estimation for complex elliptically symmetric distributions," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, no. 24, pp. 6401–6409, 2013.
- [12] Olivier Besson and Yuri I. Abramovich, "On the fisher Information Matrix for multivariate elliptically contoured distributions," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 11, pp. 1130–1133, 2013.
- [13] Davy Paindaveine, "A canonical definition of shape," *Statistics & probability letters*, vol. 78, no. 14, pp. 2240–2247, 2008.