



**HAL**  
open science

## Estimation Robuste de la Matrice de Covariance en contexte Hétérogène Rang Faible

Arnaud Breloy, Guillaume Ginolhac, Frédéric Pascal, Philippe Forster

► **To cite this version:**

Arnaud Breloy, Guillaume Ginolhac, Frédéric Pascal, Philippe Forster. Estimation Robuste de la Matrice de Covariance en contexte Hétérogène Rang Faible. 25eme Colloque francophone de traitement du signal et des images (GRETSI 2015), Sep 2015, Lyon, France. pp.1-4. hal-01226415

**HAL Id: hal-01226415**

<https://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-01226415v1>

Submitted on 9 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Estimation Robuste de la Matrice de Covariance en contexte Hétérogène Rang Faible

Arnaud BRELOY<sup>1</sup>, Guillaume GINOLHAC<sup>2</sup>, Frédéric PASCAL<sup>3</sup>, Philippe FORSTER<sup>1</sup>

<sup>1</sup>SATIE - ENS Cachan - 61, av du President Wilson 94235 CACHAN Cedex, France

<sup>2</sup>L2S - Centrale-Supelec - Plateau de Moulon, 3 rue Joliot-Curie, F-91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

<sup>3</sup>LISTIC - Université de Savoie - 4, Chemin de Bellevue, 74016 Annecy, France

abreloy, philippe.forster@satie.ens-cachan.fr, guillaume.ginolhac@univ-savoie.fr,  
frederic.pascal@centralesupelec.fr

**Résumé** – Nous considérons le problème d'estimation de la matrice de covariance (CM) d'un bruit composé d'un fouillis hétérogène de rang faible plus un bruit blanc Gaussien (BBG). Le fouillis est modélisé comme un SIRV ayant a fort rapport "fouillis à bruit" (dénote CNR). Nous proposons dans ce papier un algorithme générique permettant d'obtenir des estimateurs robustes de la CM adaptés au contexte considéré, *i.e.* ayant une structure Rang Faible. Les performances de cet algorithme sont illustrées au travers de simulations et sur des données réelles STAP.

**Abstract** – This paper addresses the problem of robust Covariance Matrix (CM) estimation in the context of a disturbance composed of a Low Rank (LR) heterogeneous clutter plus an additive white Gaussian noise (WGN). The LR clutter is modeled here by a Spherically Invariant Random Vector (SIRV) with assumed high Clutter to Noise Ratio (CNR). This paper proposes to derive a generic algorithm to compute robust estimates of the CM for the considered disturbance model. Performances are finally illustrated on numerical simulations and on a Space Time Adaptive Processing (STAP) airborne radar application.

## 1 Introduction

L'estimation de la CM est un problème fondamental en traitement du signal. En terme d'application, les performances des procédés adaptatifs sont directement impactés par la précision d'estimation de la CM. Traditionnellement la CM est estimée via la SCM, Maximum de Vraisemblance (MV) du cas gaussien. Cependant, la SCM est connue pour être peu robuste à des distributions à queues lourdes et aux données aberrantes. C'est pourquoi le cadre d'estimation robuste [1] a attiré beaucoup d'attention ces dernières années. La plupart des travaux récents porte sur les distributions CES afin de modéliser des bruits hétérogènes. Incluse dans les CES, ce papier se concentrera sur la classe des SIRVs, qui recouvre de nombreuses distributions connues (*e.g.*  $T$  et  $K$  distributions) et permet de modéliser avec fidélité des données réelles [2]. Dans ce cadre, la CM peut être estimée avec les  $M$ -estimateurs, des MV généralisés. Ces estimateurs ont été largement étudiés et sont connus pour fournir un bon compromis performance/robustesse.

En plus du problème de robustesse, se pose celui des données de grande dimension. En effet, les applications actuelles sont confrontés à des situations où peu d'échantillons  $K$  sont disponibles en comparaison à la taille des données  $M$  ( $K < M$ ). Pour de telles configurations, les estimateurs robustes de la CM ne peuvent pas être calculés car  $K > M$  est une condition de leur existence. Afin de palier ce problème, l'approche actuelle met en avant les méthodes de régularisations [3], telles que la contraction vers une matrice identité [4]. Une autre possibilité est d'ajouter un a priori sur la structure de la CM, réduisant les degrés de libertés du problème [5]. Ce papier s'inscrit dans cette optique et considère le cas d'une CM de forme : matrice de rang faible plus identité. Cependant, nous ne considérerons pas la régularisation d'estimateurs robustes, mais allons dériver directement un estimateur depuis le modèle considéré.

En effet, pour certaines configurations, le signal (ou la perturbation) est contenu dans un sous espace de dimension  $R \ll M$ . La CM totale à donc une structure de rang faible, ce qui peut être exploité pour son estimation. Nous considérerons que le rang  $R$  est connu : cette information peut être obtenue par l'analyse de la géométrie du système (comme en STAP [6]) ou en considérant un nombre fixe de brouilleurs (problème de débrouillage) ou de sources (MUSIC [7]). Finalement, le signal sera modélisé dans ce papier comme un fouillis hétérogène SIRV de rang  $R \ll M$  plus un bruit blanc gaussien (BBG).

Dans ce contexte, nous dérivons un algorithme pour calculer le MV de la CM, sous l'hypothèse de fort "fouillis à bruit" (dénote CNR). De la même manière que pour les CES, la procédure est naturellement généralisée aux  $M$ -estimateurs, qui ne sont pas conditionnés à la connaissance parfaite de la distribution du fouillis. Ces résultats représentent l'extension des précédents travaux [8], où nous considérons l'estimation seule du projecteur sur le sous espace fouillis. Ce papier propose donc une estimations de la CM totale et n'impose plus de restriction sur l'égalité des valeurs propres (nécessaire à [8]).

## 2 Modèle

On dispose de  $K$  échantillons  $\{\mathbf{z}_k\}$ . Ces données  $\mathbf{z}_k \in \mathbb{C}^M$  sont des réalisations *i.i.d.* d'un fouilli SIRV plus un BBG :

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{n}_k + \mathbf{c}_k \quad (1)$$

le BBG est distribué selon :

$$\mathbf{n}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_M), \quad (2)$$

dont on assume  $\sigma^2$  connu. Le SIRV est, conditionnellement à une variable aléatoire indépendante  $\tau_k$ , est distribué selon :

$$(\mathbf{c}_k | \tau_k) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \tau_k \boldsymbol{\Sigma}_c), \quad (3)$$

on suppose que  $\mathbb{E}(\tau) < \infty$  : la CM du SIRV existe. Cette CM  $\Sigma_c$  est définie par son rang  $R < M$  (connu), ses vecteurs propres  $\{\mathbf{v}_r\}$  et valeurs propres  $\{c_r\}$  pour  $r \in \llbracket 1, R \rrbracket$  :

$$\Sigma_c = \sum_{r=1}^R c_r \mathbf{v}_r \mathbf{v}_r^H = \mathbf{V}_c \mathbf{C}_c \mathbf{V}_c^H, \quad (4)$$

avec  $\mathbf{C}_c = \text{diag}(\{c_r\})$  et  $\mathbf{V}_c = \mathbb{U}(\{\mathbf{v}_r\})$ . On définit le Projecteur sur le sous espace (SEV) fouillis  $\Pi_c = \mathbf{V}_c \mathbf{V}_c^H$ , et son complémentaire  $\Pi_c^\perp$ . La complétion de la base  $\mathbf{V}_c$  est un set de  $M - R$  vecteurs concaténés en  $\mathbf{V}_c^\perp$  tel que  $\Pi_c^\perp = \mathbf{V}_c^\perp \mathbf{V}_c^{\perp H}$ . Considérant ce modèle, chaque donnée  $\mathbf{z}_k$  suit :

$$\begin{cases} (\mathbf{z}_k | \tau_k) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma_k), \\ \Sigma_k = \tau_k \Sigma_c + \sigma^2 \mathbf{I}_M \end{cases} \quad (5)$$

La vraisemblance s'exprime grâce à  $f_\tau$ , la DDP de  $\tau$  :

$$f(\{\mathbf{z}_k\} | \Sigma_c) = \prod_{k=1}^K \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\mathbf{z}_k^H \Sigma_c^{-1} \mathbf{z}_k}}{\pi^M |\Sigma_k|} f_\tau(\tau_k) d\tau_k \quad (6)$$

La CM totale du processus est donc :

$$\Sigma_{tot} = \mathbb{E}(\Sigma_k) = \mathbb{E}(\tau) \Sigma_c + \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (7)$$

Nous considérons l'hypothèse de fort CNR : le BBG est négligeable devant le fouillis SIRV. On peut donc approcher  $\Sigma_k$  :

$$\Sigma_k \approx \tau_k \Sigma_c + \sigma^2 \Pi_c^\perp \quad (8)$$

qui s'exprime par blocs à l'aide de  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_c \ \mathbf{V}_c^\perp]$  :

$$\Sigma_k = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \tau_k \mathbf{C}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_{M-R} \end{pmatrix} \mathbf{V}^H \quad (9)$$

Le problème adressé est celui de l'estimation de la matrice  $\Sigma_c$ . Ce problème sera traité comme l'estimation par MV de  $\mathbf{C}_c$  et de  $\mathbf{V}_c$ , conditionnellement l'un à l'autre. Différentes relaxations (robustes et algorithmiques) de ces MV seront discutées. Enfin, nous proposons section 4 d'utiliser un algorithme itératif "2-Step" afin de calculer les estimateurs proposés.

## 3 MV des paramètres de la CM

### 3.1 Estimation de $\mathbf{C}_c$ et des textures $\tau_k$

**Estimation par MV :** On assume qu'une base arbitraire du SEV fouillis  $\mathbf{U}_c$  est disponible. Soit  $\mathbf{U}_c^\perp$  la complétion de cette base.  $\Sigma_k$  s'exprime alors selon  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_c \ \mathbf{U}_c^\perp]$  :

$$\Sigma_k = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \tau_k \mathbf{M}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_{M-R} \end{pmatrix} \mathbf{U}^H \quad (10)$$

On remarque que  $\mathbf{U}_c$  engendre le SEV fouillis et est donc est égal à  $\mathbf{V}_c$  à une rotation près. Par conséquent  $\mathbf{M}_c$  n'est pas nécessairement diagonale. La variable réduite  $\mathbf{z}_k^c = \mathbf{U}_c^H \mathbf{z}_k$  suit une loi SIRV de CM  $\mathbf{M}_c$ , on a donc le théorème suivant :

**Theorem 1** Pour une base  $\mathbf{U}_c$  fixe, le MV de  $\mathbf{M}_c$  est défini comme le point fixe :

$$\hat{\mathbf{M}}_c = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \psi(\mathbf{z}_k^H \mathbf{U}_c \hat{\mathbf{M}}_c^{-1} \mathbf{U}_c^H \mathbf{z}_k^H) \mathbf{U}_c^H \mathbf{z}_k^H \mathbf{z}_k^H \mathbf{U}_c \quad (11)$$

avec  $\psi = -h'_r/h_r$  et  $h_r(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-t/\tau) \tau^R f_\tau(\tau) d\tau$ . Ce MV existe si  $K > R$  et  $\psi$  satisfait certaines conditions (Théorème 6 de [1]). Il peut être obtenu par les itérations :

$$\mathbf{M}_{(n+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \psi(\mathbf{z}_k^H \mathbf{U}_c \mathbf{M}_{(n)}^{-1} \mathbf{U}_c^H \mathbf{z}_k^H) \mathbf{U}_c^H \mathbf{z}_k^H \mathbf{z}_k^H \mathbf{U}_c \quad (12)$$

qui convergent vers la solution. ■

Pour une base arbitraire  $\mathbf{U}_c$ , on a donc :

$$\left( \hat{\Sigma}_c | \mathbf{U}_c \right) = \mathbf{U}_c \hat{\mathbf{M}}_c \mathbf{U}_c^H = \hat{\mathbf{V}}_c \hat{\mathbf{C}}_c \hat{\mathbf{V}}_c^H \quad (13)$$

Les paramètres  $\hat{\mathbf{V}}_c$  et  $\hat{\mathbf{C}}_c$  peuvent être obtenus par SVD de  $\hat{\Sigma}_c$ .

**Estimation Robuste :** Il convient de remarquer que la DDP de  $f_\tau$  n'est, à priori, pas connue en pratique. Dans ce cas, il est possible d'utiliser les  $M$ -estimateurs : des MV généralisés. Ces derniers sont définis comme dans le Théorème 1, à la différence que la fonction  $\psi$  peut remplacée arbitrairement par une fonction  $\phi$  sans lien nécessaire avec  $f_\tau$ . Le choix de cette fonction est néanmoins soumis à des conditions d'existence [1]. Le reste du papier se concentrera sur l'estimateur de Tyler, défini pour  $\phi(t) = R/t$ . Il est aussi connu sous le nom d'estimateur du point fixe (FPE) [9] et correspond au MV de la CM pour des textures considérées comme déterministes et inconnues.

**Estimation d'échelle (CNR) :** Dans le cas où  $f_\tau$  est connu, le MV de la CM totale est finalement obtenu avec :

$$\hat{\Sigma} = \mathbb{E}(\tau) \hat{\Sigma}_c + \sigma^2 (\mathbf{I}_M - \hat{\Pi}_c) \quad (14)$$

Cependant, si on utilise le FPE, une ambiguïté d'échelle doit être levée. les textures estimées sont :

$$\hat{\tau}_k = (\mathbf{z}_k^H \mathbf{U}_c \hat{\mathbf{M}}_c^{-1} \mathbf{U}_c^H \mathbf{z}_k^H) / R \quad (15)$$

Et on peut évaluer la CM totale en remplaçant  $\mathbb{E}(\tau)$  par la moyenne empirique  $\hat{\mathbb{E}}(\tau) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\tau}_k$  dans (14).

### 3.2 Estimation du SEV fouillis

**Estimation MV** On suppose que les textures  $\{\tau_k\}$  et la matrice  $\mathbf{C}_c$  sont connues et fixées. On cherche le MV de la base  $\mathbf{V}_c = \mathbb{U}(\{\mathbf{v}_r\})$  du SEV fouillis. La log-vraisemblance est ré-exprimée en utilisant le changement de variable  $\mathbf{V}_c^\perp \mathbf{V}_c^{\perp H} = \mathbf{I}_m - \mathbf{V}_c \mathbf{V}_c^H$ . le MV de  $\{\mathbf{v}_r\}$  s'exprime alors comme la solution du problème d'optimisation sous contraintes<sup>1</sup> suivant :

$$\begin{aligned} \max_{\{\mathbf{v}_r\}} \quad & f_0(\mathbf{V}_c) = f_0(\{\mathbf{v}_r\}) = \sum_{r=1}^R \mathbf{v}_r^H \mathbf{M}_r \mathbf{v}_r \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{v}_r^H \mathbf{v}_r = 1, \quad r \in \llbracket 1, R \rrbracket \\ & \mathbf{v}_r^H \mathbf{v}_j = 0, \quad r, j \in \llbracket 1, R \rrbracket, \quad r \neq j \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{M}_r = \sum_{k=1}^K \left( \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{c_r \tau_k} \right) \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H \simeq \sum_{k=1}^K \left( \frac{c_r \tau_k}{\sigma^2 + c_r \tau_k} \right) \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H$$

1. Contraintes unitaires, car une base vérifie  $\mathbf{V}_c^H \mathbf{V}_c = \mathbf{I}_R$ .

Contrairement au problème de SVD (qui apparaîtra dans le paragraphe suivant), ce problème n'a pas de solution analytique. Il est cependant possible d'atteindre un minima local de  $f_0$  au moyen d'un algorithme de descente itératif sur la variété de Stiefel<sup>2</sup>, qui contraint naturellement les itérés à former une base. Nous avons utilisé l'algorithme 15 de [10] : "Modified Steepest descent on Stiefel manifold".

**Relaxation sur les valeurs propres** Afin de simplifier le problème précédent, il est possible de considérer la relaxation qui consiste à moyenniser les facteurs  $c_r \tau_k$  dans l'expression des matrices  $\mathbf{M}_r$ . Au regard des travaux précédents [8, 11], cette relaxation revient à exprimer le MV du SEV fouillis en considérant que les valeurs propres de  $\Sigma_c$  sont toutes égales ( $\mathbf{C}_r \propto \mathbf{I}_R$ ). On définit les textures moyennées  $\tilde{\tau}_k$ , et les facteurs  $\tilde{\alpha}_k$  par :

$$\tilde{\tau}_k = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R c_r \tau_k \quad ; \quad \tilde{\alpha}_k = \frac{\tilde{\tau}_k}{\sigma^2 + \tilde{\tau}_k}$$

On peut alors approcher les matrices  $\mathbf{M}_r$  par :

$$\mathbf{M}_r \simeq \tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \tilde{\alpha}_k \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H \quad \forall r \in \llbracket 1, R \rrbracket \quad (16)$$

Comme  $\tilde{\mathbf{M}}$  n'est pas dépendante de  $r$ , le problème d'optimisation relaxé s'apparente à une SVD. Le MV approché de la base du SEV fouillis s'obtient donc comme les  $R$  vecteurs propres dominants de  $\tilde{\mathbf{M}}$ .

## 4 Algorithme 2-Step

Les paramètres du MV (ou des dérivés robustes) de la CM sont définis conditionnellement l'un à l'autre. Nous proposons donc de recourir à un algorithme itératif 2-Step, qui maximisera la vraisemblance de manière alternée selon les paramètres d'intérêt. La procédure se décrit comme suit :

◦ Étape 1 : pour une base  $\hat{\mathbf{U}}_c^{(n)}$  fixée, les itérations (12) donnent  $\hat{\mathbf{M}}_c^{(n)}$  et les textures  $\{\hat{\tau}_k^{(n)}\}$ . La SVD de  $\hat{\Sigma}_c^{(n)} = \hat{\mathbf{U}}_c^{(n)} \hat{\mathbf{M}}_c^{(n)} \hat{\mathbf{U}}_c^{(n)}$  donne  $\hat{\mathbf{C}}_c^{(n)}$  et  $\hat{\mathbf{V}}_c^{(n)}$ .

$$\hat{\mathbf{U}}_c^{(n)} \xrightarrow{\text{MLE Step 1}} \hat{\mathbf{V}}_c^{(n)}, \hat{\mathbf{C}}_c^{(n)}, \{\hat{\tau}_k^{(n)}\}$$

◦ Étape 2 :  $\hat{\mathbf{M}}_c^{(n)}$  et  $\{\hat{\tau}_k^{(n)}\}$  sont utilisées pour obtenir  $\{\hat{\mathbf{M}}_r^{(n)}\}$ . Résoudre le problème d'optimisation (relaxé ou non) donne la base actualisée  $\hat{\mathbf{U}}_c^{(n+1)}$ .

$$\hat{\mathbf{V}}_c^{(n)}, \hat{\mathbf{C}}_c^{(n)}, \{\hat{\tau}_k^{(n)}\} \xrightarrow{\text{MLE Step 2}} \hat{\mathbf{U}}_c^{(n+1)}$$

Nous considérerons deux adaptations de cet algorithme :

◦ Algorithme "MLE" : L'étape 1 est résolue à l'aide du FPE. L'étape 2 est résolue avec l'algorithme 15 de [10].

◦ Algorithme "A-MLE" : L'étape 1 est résolue à l'aide du FPE. L'étape 2 est résolue par SVD à l'aide de la relaxation décrite section 3.2.

2. L'objectif  $f_0$  n'étant pas invariant par rotation, le problème ne peut pas être optimisé à l'aide d'algorithmes de descente sur la variété de Grassmann.

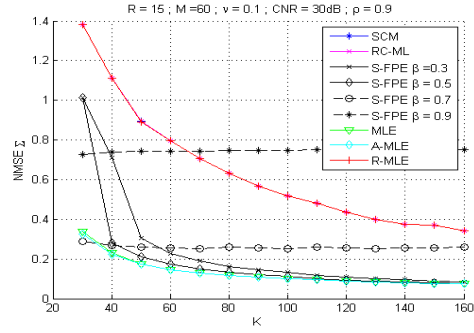


FIGURE 1 – NMSE en fonction de  $K$ . Dimension  $M = 60$ .  $\sigma^2 = 1$ . Paramètres du fouillis : rang  $R = 15$ , les textures  $\tau_k$  suivent une loi Gamma  $\tau \sim \Gamma(\nu, 1/\nu)$  de paramètre  $\nu = 0.1$ . le SIRV résultant est donc une  $K$ -distribution fortement hétérogène.  $\Sigma_c$  est construite avec les  $R$  premiers vecteurs et valeurs propres d'une matrice Toeplitz de paramètre  $\rho = 0.9$ . Cette CM est multipliée par une constante pour fixer le CNR à 30dB.

## 5 Résultats

Voici les estimateurs qui seront comparés :

- $\hat{\Sigma}_{SCM}$  est la SCM classique.
- $\hat{\Sigma}_{S-FPE}$  est le Shrinkage-FPE (S-FPE) [4], le FPE régularisé pouvant être calculé pour  $K < M$ , il est défini pour  $\beta \in (\max(0, 1 - K/M), 1]$  par :

$$\hat{\Sigma}_{S-FPE}(\beta) = \frac{(1 - \beta)M}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H}{\mathbf{z}_k^H \hat{\Sigma}_{S-FPE}^{-1}(\beta) \mathbf{z}_k} + \beta \mathbf{I}_M$$

- $\hat{\Sigma}_{RC-ML}$  est l'estimateur proposé par [12]. Il correspond à la SCM avec les  $M - R$  dernières valeurs propres seuillées pour assurer une structure rang faible.
- $\hat{\Sigma}_{MLE}$  et  $\hat{\Sigma}_{A-MLE}$  sont les algorithmes proposés en section précédente.

La figure 1 présente le NMSE des différents estimateurs en fonction de  $K$ . Les données ont été générées selon le modèle décrit section 2. Premièrement, on note que les estimateurs proposés sont les plus précis pour ce contexte. De plus, on remarque que MLE et A-MLE ont des performances similaires, ce qui indique que la relaxation proposée est fiable pour estimer le SEV fouillis. La SCM et RC-ML sont les estimateurs les moins performants, ce qui était prévisible puisque le bruit est hétérogène. Enfin, le S-FPE a des performances qui dépendent grandement du paramètre  $\beta$ . Pour  $\beta = 0.3$  et  $\beta = 0.5$  S-FPE tend à avoir des NMSE proches de ceux de MLE et A-MLE quand  $K$  augmente. Pour  $\beta = 0.7$  et  $\beta = 0.9$  S-FPE semble trop "tiré" vers l'identité et n'est donc pas précis pour la configuration considérée. On remarquera qu'il n'y a actuellement pas de méthode adaptative pour un choix "optimal" de  $\beta$  pour le modèle considéré. A-MLE et MLE semblent donc des alternatives intéressantes si une information a priori sur le rang est disponible.

La figure 2 illustre les performances des estimateurs sur une application STAP<sup>3</sup>. Le STAP [6] est une technique utilisée en radar aéroportée pour détecter des cibles mouvantes noyées dans un fort fouillis. Le signal reçu  $\mathbf{z}$  se compose de : une cible

3. Les données sont fournies par la DGA/MI que les auteurs remercient.

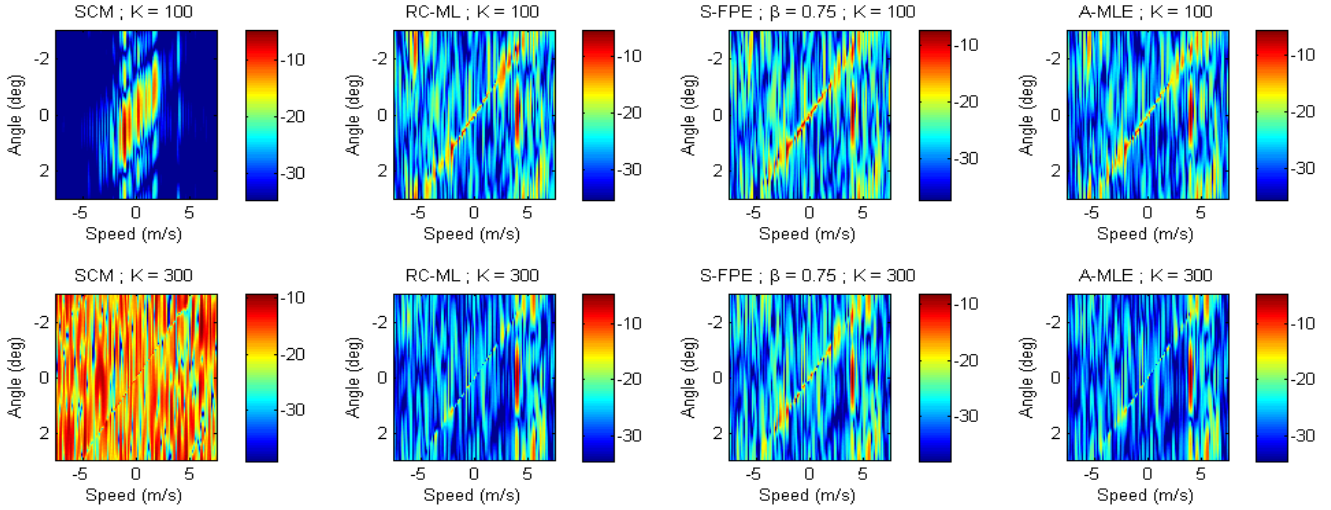


FIGURE 2 – Détecteur de gauche à droite :  $\Lambda_{SCM}$ ,  $\Lambda_{RC-ML}$ ,  $\Lambda_{S-FPE}$  et  $\Lambda_{A-MLE}$ . Haut :  $K = 100$ . Bas  $K = 300$ . Fréquence centrale :  $f_0 = 10\text{GHz}$ . Bande de fréquences :  $B = 5\text{MHz}$ . Célérité du radar :  $V = 100\text{m/s}$ . Distance inter-capteurs :  $d = 0,3\text{m}$ . Fréquence de répétition des impulsions :  $f_r = 1\text{kHz}$ . Rang du Clutter :  $R = 45$  (selon la loi de Brennan)/ CNR évalué :  $20\text{dB}$ . Cible présente à  $(4\text{ m/s}, 0\text{ deg})$  avec un rapport signal à fouillis de  $-5\text{dB}$ .

potentielle  $\mathbf{p}$ , le fouillis de sol, le bruit thermique. Il est important de noter que cette application correspond bien au contexte considéré. En effet, en side-looking STAP, la CM du fouillis du sol est hétérogène et de rang faible. De plus, ce rang peut être évaluée grâce à la loi de Brennan [13]. Les performances des estimateurs sont illustrées au travers d'un problème de détection de cible. Nous considérons le détecteur ANMF [14], défini par :

$$\hat{\Lambda}(\hat{\Sigma}) = \frac{|\mathbf{p}^H \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}|^2}{|\mathbf{p}^H \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{p}| |\mathbf{z}^H \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}|}, \quad (17)$$

pour un estimateur de la CM donné  $\hat{\Sigma}$ . La figure 2 montre des sorties de détecteurs construits avec différents estimateurs de la CM. Pour  $K < M$ , La SCM n'est pas inversible,  $\hat{\Lambda}_{SCM}$  est donc construit avec la SCM régularisée vers l'identité (identiquement à S-FPE). L'estimateur S-FPE est calculé avec  $\beta = 0.75$  : [4] montre que cette valeur est proche de l'optimale pour la détection sur ces données. Pour  $K = 100$ ,  $\hat{\Lambda}_{SCM}$  ne permet pas de blanchir le fouillis, la cible n'est pas détectée. Les détecteurs  $\hat{\Lambda}_{RC-ML}$  et  $\hat{\Lambda}_{S-FPE}$  permettent une détection de la cible mais  $\hat{\Lambda}_{A-MLE}$  offre cependant un meilleur rejet de l'interférence. On remarque que  $\hat{\Lambda}_{RC-ML}$  et  $\hat{\Lambda}_{A-MLE}$  ont des performances proches, ce qui pouvait être prévu car le fouillis de ces données est quasi-Gaussien. Les conclusions sont les mêmes pour  $K = 300$ . On observe que  $\hat{\Lambda}_{RC-ML}$  et  $\hat{\Lambda}_{A-MLE}$  offrent de bonnes performances sans avoir de paramètre de régularisation à régler, ce qui illustre l'intérêt de considérer un à priori de structure quand cela est possible.

## Références

- [1] E. Ollila, D. Tyler, V. Koivunen, and H. Poor, "Complex elliptically symmetric distributions : Survey, new results and applications," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 60, no. 11, pp. 5597–5625, 2012.
- [2] M. Greco, F. Gini, and M. Rangaswamy, "Statistical analysis of measured polarimetric clutter data at different range resolutions," *Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings -*, vol. 153, no. 6, pp. 473–481, December 2006.
- [3] A. Wiesel, "Unified framework to regularized covariance estimation in scaled Gaussian models," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 60, no. 1, pp. 29–38, 2012.
- [4] F. Pascal, Y. Chitour, and Y. Quek, "Generalized robust shrinkage estimator and its application to stap detection problem," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 62, no. 21, pp. 5640–5651, Nov 2014.
- [5] I. Soloveychik and A. Wiesel, "Tyler's covariance matrix estimator in elliptical models with convex structure," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 62, no. 20, pp. 5251–5259, Oct 2014.
- [6] J. Ward, "Space-time adaptive processing for airborne radar," Lincoln Lab., MIT, Lexington, Mass., USA, Tech. Rep., December 1994.
- [7] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans.-ASSP*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, March 1986.
- [8] A. Breloy, L. Le Magoarou, G. Ginolhac, F. Pascal, and P. Forster, "Estimation par maximum de vraisemblance du sous espace clutter dans un bruit heterogene rang faible avec application au stap," in *Proceedings of GRETSI*, Brest, September 2013.
- [9] F. Pascal, Y. Chitour, J. Ovarlez, P. Forster, and P. Larzabal, "Existence and characterization of the covariance matrix maximum likelihood estimate in spherically invariant random processes," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 1, pp. 34–48, January 2008.
- [10] J. Manton, "Optimization algorithms exploiting unitary constraints," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 3, pp. 635–650, Mar 2002.
- [11] R. Raghavan, "Statistical interpretation of a data adaptive clutter subspace estimation algorithm," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 2, pp. 1370–1384, 2012.
- [12] B. Kang, V. Monga, and M. Rangaswamy, "Rank-constrained maximum likelihood estimation of structured covariance matrices," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 1, pp. 501–515, January 2014.
- [13] L. E. Brennan and F. Staudaher, "Subclutter visibility demonstration," RL-TR-92-21, Adaptive Sensors Incorporated, Tech. Rep., March 1992.
- [14] S. Kraut and L. Scharf, "The cfar adaptive subspace detector is a scale-invariant glrt," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 9, pp. 2538–2541, 1999.